

# **Strukturentwurf für Luft- und Raumfahrt**

## **Formelsammlung**

**Institut für Leichtbau, RWTH Aachen**

Stand: 11. August 2010

## Inhaltsverzeichnis

0.1	Das Verfahren nach Maxwell-Mohr . . . . .	3
0.2	Die Nachgiebigkeitsmatrix des statisch bestimmten Systems . . . . .	3
0.3	Schubfeldträger . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Statisch unbestimmte Systeme</b>	<b>5</b>
1.1	Das Kraftgrößenverfahren . . . . .	5
1.2	Die Verschiebungsmethode . . . . .	5
1.3	Anwendungen . . . . .	6
1.3.1	Der mehrzellige Hohlquerschnitt als Balken . . . . .	6
1.3.2	Die Dreigurtscheibe mit kontinuierlich verteilten Quersteifen . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Das Stabilitätsverhalten schlanker bzw. dünnwandiger Strukturen</b>	<b>7</b>
2.1	Knicken des geraden Stabes . . . . .	7
2.2	Das Verfahren nach Rayleigh-Ritz . . . . .	9
2.3	Der Balken auf elastischer Bettung . . . . .	9
2.4	Biegedrillknicken . . . . .	10
2.5	Der Kreisring unter gleichmäßigem statischen Druck . . . . .	11
2.6	Die ebene, rechteckige Platte . . . . .	12
2.7	Örtliches Beulen dünnwandiger Profile . . . . .	14
2.8	Das Diagonalzugfeld (Wagnerträger) . . . . .	15
2.9	Stabilität der Zylinderschale . . . . .	17
2.9.1	Die isotrope Schale . . . . .	17
2.9.2	Die orthotrop versteifte Zylinderschale . . . . .	18
2.10	Sandwichstrukturen . . . . .	22

# 1 Die Verformung elastischer Systeme

## 1.1 Formänderungsarbeit/Arbeitssatz

- Arbeitssatz: Die von äußeren Kräften geleistete Arbeit wird vom Balken als innere Arbeit  $U$  gespeichert.

$$W_a = U$$

- Äußere Arbeit an einem elastischen Balken:

$$W_a = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n P_j w_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m M_j \varphi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k T_j \vartheta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \int_{a_j} p_j(s) w_j(s) ds$$

$P$  : Einzelkraft

$M$  : Biegemoment

$T$  : Torsionsmoment

$p$  : Streckenlast

$w, \varphi, \theta$  : Verformungen am Ort und in Richtung der angreifenden Lasten

$a_j$  : Belastungslänge von  $p$

- Innere Arbeit für einen Balken der Länge  $l$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_y^2}{I_y E} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{I_z E} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{GA_{Qy}} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_z^2}{GA_{Qz}} dx + \frac{1}{2} \int_l \frac{T^2}{I_T G} dx$$

## 1.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

- Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\delta U = \delta W_a$$

- Prinzip der virtuellen Kraft:

$$\delta U^* = \delta W_a^*$$

Beispiel: Schubstarrer Balken ohne Torsions- und Längskraftbelastung

$$\delta U = - \int_0^l (M_y \delta w'') dx$$

$$\delta U^* = - \int_0^l (w'' \delta M_y) dx$$

## 1.3 Der Satz vom stationären Wert der potentiellen Energie

Bei virtuellen Änderungen der Systemgrößen gilt für das Gesamtpotential  $\Pi$ :

$$\delta \Pi = 0$$

mit

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = U - W$$

$\Pi_i$  : Inneres Potential

$\Pi_a$  : Äußeres Potential

### 1.4 Das Verfahren nach Maxwell-Mohr

$$\delta U = \int_l \frac{N_0 N_1}{EA} dx + \int_l \frac{M_{y0} M_{y1}}{I_y E} + \int_l \frac{M_{z0} M_{z1}}{I_z E} dx + \int_l \frac{Q_{y0} Q_{y1}}{GA_{qy}} + \int_l \frac{Q_{z0} Q_{z1}}{GA_{qz}} dx + \int_l \frac{T_0 T_1}{I_T G} dx$$

	$a c l$	$\frac{2}{3} a c l$	$\frac{1}{2} a c l$	$\frac{1}{3} a c l$	$\frac{a l}{2} (c + d)$	$\frac{2}{3} a c l$
	$\frac{2}{3} a c l$	$\frac{8}{15} a c l$	$\frac{5}{12} a c l$	$\frac{3}{10} a c l$	$\frac{a l}{12} (3c + 5d)$	$\frac{7}{15} a c l$
	$\frac{1}{2} a c l$	$\frac{5}{12} a c l$	$\frac{1}{3} a c l$	$\frac{1}{4} a c l$	$\frac{a l}{6} (c + 2d)$	$\frac{1}{3} a c l$
	$\frac{1}{3} a c l$	$\frac{3}{10} a c l$	$\frac{1}{4} a c l$	$\frac{1}{5} a c l$	$\frac{a l}{12} (c + 3d)$	$\frac{1}{5} a c l$
	$\frac{2}{3} a c l$	$\frac{11}{30} a c l$	$\frac{1}{4} a c l$	$\frac{2}{15} a c l$	$\frac{a l}{12} (5c + 3d)$	$\frac{7}{15} a c l$
	$\frac{1}{2} a c l$	$\frac{1}{4} a c l$	$\frac{1}{6} a c l$	$\frac{1}{12} a c l$	$\frac{a l}{6} (2c + d)$	$\frac{1}{3} a c l$
	$\frac{1}{3} a c l$	$\frac{2}{15} a c l$	$\frac{1}{12} a c l$	$\frac{1}{30} a c l$	$\frac{a l}{12} (3c + d)$	$\frac{1}{5} a c l$
	$\frac{c l}{2} \cdot (a + b)$	$\frac{c l}{12} \cdot (3a + 5b)$	$\frac{c l}{6} \cdot (a + 2b)$	$\frac{c l}{12} \cdot (a + 3b)$	$\frac{l}{6} [a(2c + d) + b(c + 2d)]$	
	$\frac{2}{3} a c l$	$\frac{7}{15} a c l$	$\frac{1}{3} a c l$	$\frac{1}{5} a c l$	$\frac{a l}{3} (c + d)$	$\frac{8}{15} a c l$

\* Parabeln zweiten Grades, • Scheitelpunkt

### 1.5 Die Nachgiebigkeitsmatrix des statisch bestimmten Systems

– Allgemein:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1j} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2j} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \dots & \delta_{ij} & \dots & \delta_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nj} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

– Nachgiebigkeitszahlen:

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_l \frac{M_{yi} M_{yj}}{I_y E} + \int_l \frac{M_{zi} M_{zj}}{I_z E} dx + \int_l \frac{Q_{yi} Q_{yj}}{GA_{qy}} + \int_l \frac{Q_{zi} Q_{zj}}{GA_{qz}} dx + \int_l \frac{T_i T_j}{I_T G} dx$$

## 1.6 Schubfeldträger

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_{l_k} \left( \frac{N_i N_j}{EA} \right) dx + \delta U_{ij}$$

– Allgemein:

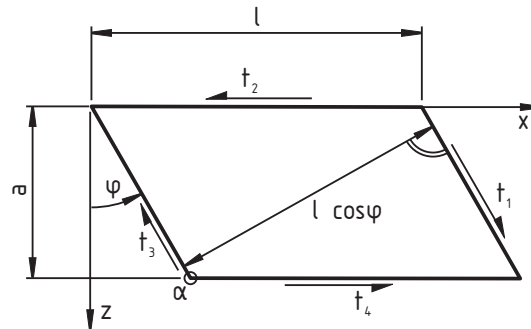
$$\delta U_{ij} = \sum_n \int_{A_{Sn}} \left( \frac{t_i t_j}{Gh} + \frac{n_i n_j}{Eh} \right) dA_S$$

– Rechteckfeld:

$$\delta U_{ij} = \frac{t_i t_j}{Gh} A_S$$

– Parallelogrammfeld:

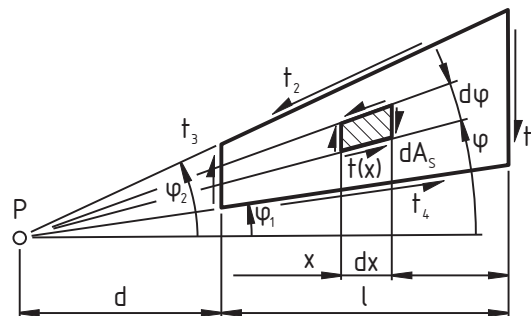
$$\delta U_{ij} = \frac{t_i t_j}{Gh} A_S \left( 1 + 4 \frac{G}{E} \tan^2 \varphi \right)$$



$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4$$

– Trapezfeld:

$$\delta U_{ij} = \frac{t_{m_i} t_{m_j}}{Gh} A_S \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{G}{E} \left( \tan^2 \varphi_1 + \tan \varphi_1 \tan \varphi_2 + \tan^2 \varphi_2 \right) \right]$$



- $k$  : Anzahl der Stäbe
- $n$  : Anzahl der Schubfelder
- $t_m$  : mittlerer Feldschubfluß
- $A_S$  : Fläche des Schubfelds

## 2 Statisch unbestimmte Systeme

### 2.1 Das Kraftgrößenverfahren

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Schnitt- bzw. Reaktionskräfte ergeben sich aus der Überlagerung der jeweiligen Kräfte im Grundsystem mit denen der Einzellastfälle

Beispiel:

$$M(x) = M_0 + M_1 X_1 + \dots + M_n X_n$$

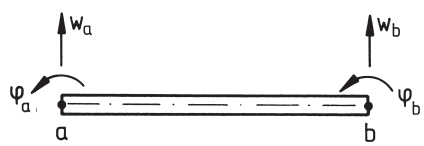
### 2.2 Die Verschiebungsmethode

Steifigkeitsmatrix eines Balkens unter beliebiger Belastung:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} = [K]$$

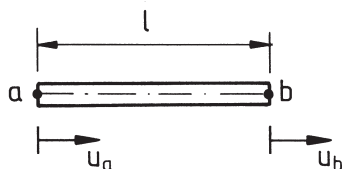
$$k_{ij} = \int_l u_i' u_j' E A dx + \int_l w_{Byi}'' w_{Byj}'' I_y E dx + \int_l w_{Bzi}'' w_{Bzj}'' I_z E dx \\ + \int_l w_{Syi} w_{Syj} G A_{Qy} dx + \int_l w_{Szi} w_{Szj} G A_{Qz} dx + \int_l \vartheta_i' \vartheta_j' I_T G dx$$

- Für einen schubstarreren Balken unter Querkraft- und Momentenbelastung gilt in lokalen Koordinaten:



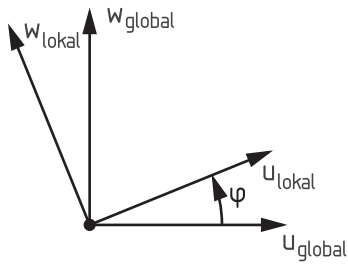
$$\frac{2I_y E}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_a \\ \varphi_a \\ w_b \\ \varphi_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ M_a \\ P_b \\ M_b \end{Bmatrix}$$

- Für einen Stab gilt in lokalen Koordinaten:



$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}$$

- Koordinatentransformation von lokalen Koordinaten in ein um  $\varphi$  gedrehtes globales Koordinatensystem:



$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}_{\text{lokal}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}_{\text{global}}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{\text{lokal}} = T_1 \cdot \vec{u}_{\text{global}}$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}_{\text{lok}} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}_{\text{glob}}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_{\text{lok}} = T \cdot \vec{u}_{\text{glob}}$$

$$F_{\text{glob}} = K_{\text{glob}} \cdot \vec{u}_{\text{glob}} \quad ; \quad K_{\text{glob}} = T^T \cdot K_{\text{lok}} \cdot T$$

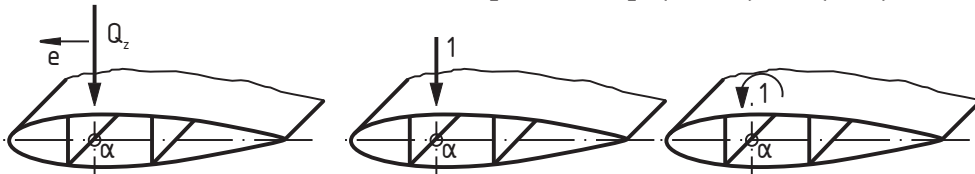
### 2.3 Anwendungen

#### 2.3.1 Der mehrzellige Hohlquerschnitt als Balken

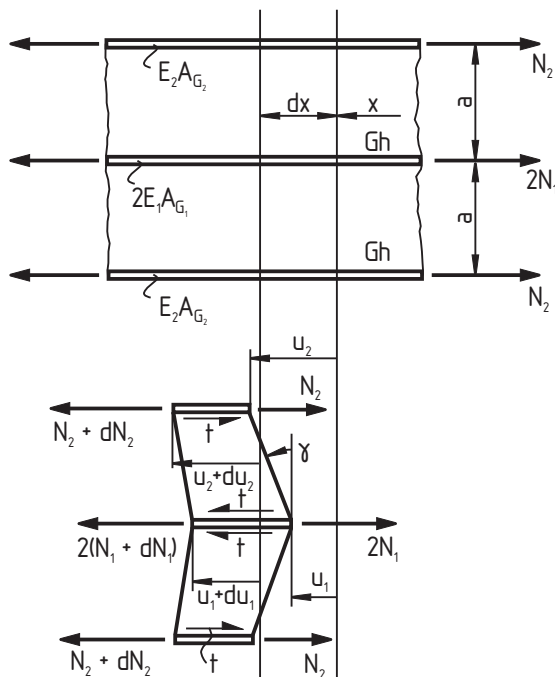
- Grad der statischen Unbestimmtheit  $U_{\text{Hohlquerschnitt}}$ :

$$U_{\text{Hohlquerschnitt}} = n - 1 \quad n : \text{Anzahl der Zellen}$$

- Lage des Schubmittelpunkts  $e$ :  $\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_z \\ Q_{ze} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ 0 \end{Bmatrix}$



#### 2.3.2 Die Dreigurtscheibe mit kontinuierlich verteilten Quersteifen



- Differentialgleichung für  $t$ :

$$t'' - \alpha^2 t = 0$$

mit:

$$\alpha^2 = \frac{Gh}{E \cdot a} \left( \frac{1}{A_{G1}} + \frac{1}{A_{G2}} \right)$$

folgt:

$$t(x) = P_0 \alpha \frac{A_{G2}}{A_{G1} + A_{G2}} \frac{\sinh \alpha (l - x)}{\cosh \alpha l}$$

- Differentialgleichung für  $u_1$ :

$$u_1^{IV} - \alpha^2 u_1'' = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{Gh}{a} \left( \frac{1}{A_{G1} E_{G1}} + \frac{1}{A_{G2} E_{G2}} \right)$$

– Lösung:

$$u_1 = C_1 + C_2x + C_3e^{\alpha x} + C_4e^{-\alpha x}$$

– Bestimmung der Konstanten  $C_1 - C_4$  durch Randbedingungen:

$$N_1 = u_1' A_{G_1} E_1$$

$$N_2 = u_2' A_{G_2} E_2$$

– Verformung  $u_2$  und Schubfluß  $t$ :

$$u_2 = u_1 - \frac{a}{Gh} u_1'' A_{G_1} E_1$$

$$t = \frac{Gh}{a} (u_2 - u_1)$$

### 3 Das Stabilitätsverhalten schlanker bzw. dünnwandiger Strukturen

#### 3.1 Knicken des geraden Stabes

Differentialgleichung:

$$(EI_y w'')'' + (Pw')' = 0$$

– Elastisches Knicken nach Euler:

$$P_{krit} = c \frac{\pi^2 I_y E}{l^2}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{krit}}{A} = c \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Eulerfall	Systemskizze	kritische Last	c
1		$P_{krit} = \frac{\pi^2 EI_y}{4 l^2}$	$\frac{1}{4}$
2		$P_{krit} = \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$	1
3		$P_{krit} = 2.046 \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$	$\approx 2$
4		$P_{krit} = 4 \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$	4

$P_{krit}$  : kritische Last

$\lambda$  : Schlankheitsgrad ( $\lambda = \frac{l}{i}$ )

$i$  : Trägheitsradius ( $i^2 = \frac{I_y}{A}$ )

$A$  : Querschnittsfläche des Stabs

- Berücksichtigung der Plastizität  
nach Engesser-Karman  $\Rightarrow$  kritische Dehnung  $\varepsilon_{kr}$

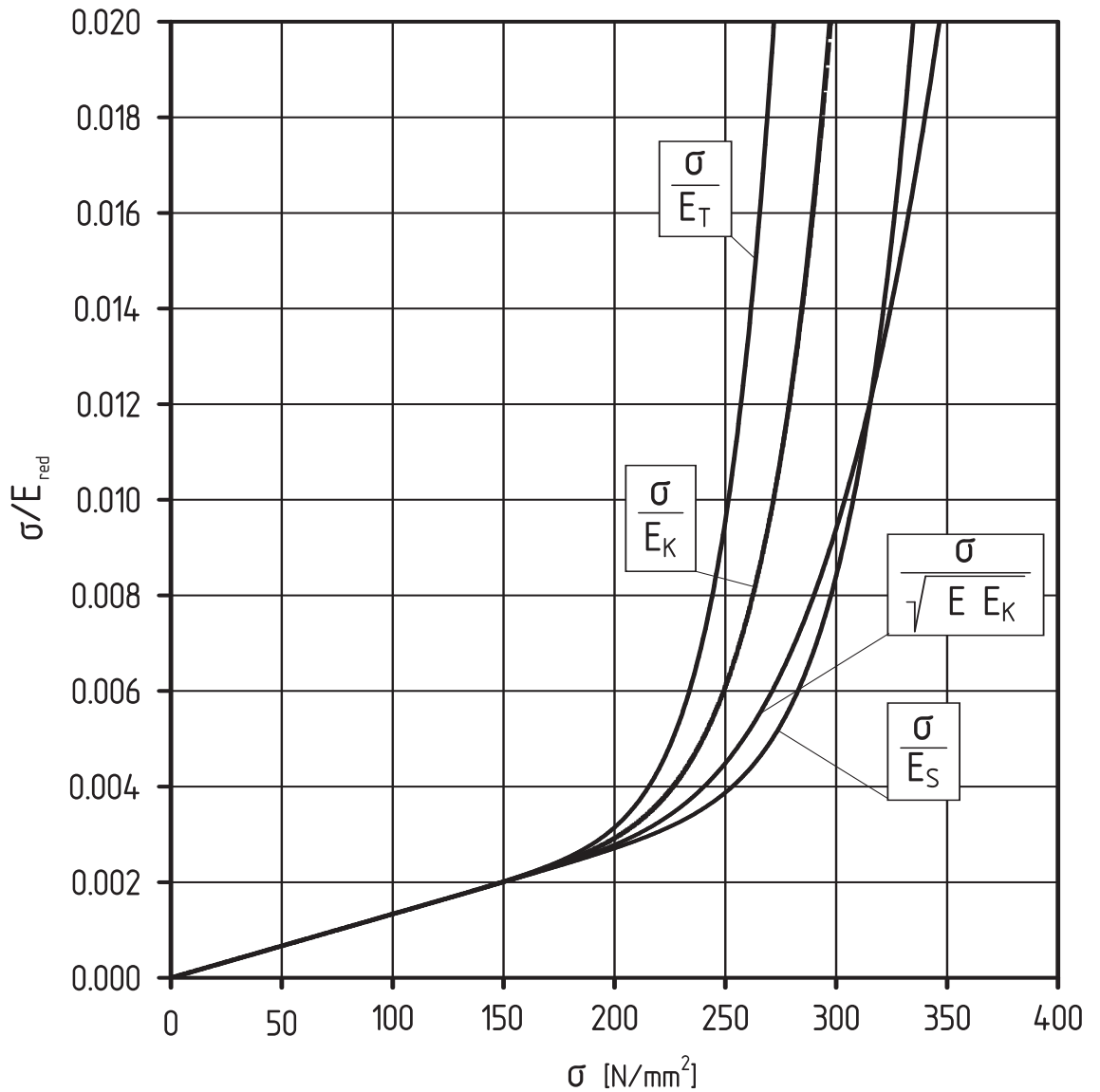
$$\varepsilon_{kr} = \frac{\sigma_{kr}}{E_{red}} = c \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad ; \quad E_{red} = E_k$$

- Rechteckquerschnitt:

$$E_k = \frac{4E_t E}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E})^2}$$

(auch anwendbar auf alle kompakten Querschnitte)

Werkstoff Al2024 T3



### 3.2 Das Verfahren nach Rayleigh-Ritz

Voraussetzung: Das Potential der äußeren Kräfte existiert  $\Leftrightarrow$  Konservatives System

Wahl einer Ansatzfunktion für die Verschiebung unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen z.B.:

$$\tilde{w} = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + \dots + a_n \cdot f_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(x)$$

Für das Potential  $\Pi$  gilt:

$$\tilde{\Pi} = f(\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{w}'')$$

Für Gleichgewicht gilt:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Pi} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial a_i} &= 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Beispiel: Schubstarrer Balken unter einer Streckenlast

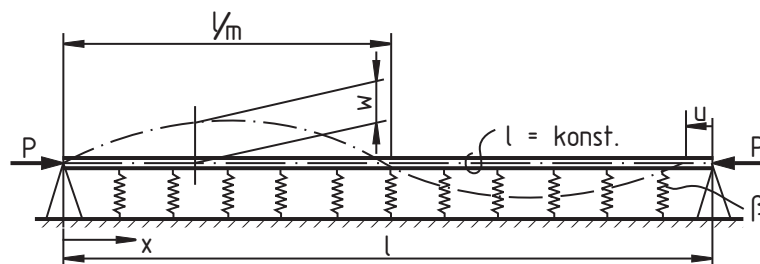
$$\delta \tilde{\Pi} = \int_0^l EI_y \tilde{w}'' \delta \tilde{w}'' dx - \int_0^l p(x) \delta \tilde{w} dx$$

$\tilde{w}, \tilde{\Pi}$  : Näherung für die Verschiebung und das Potential

### 3.3 Der Balken auf elastischer Bettung

Differentialgleichung eines in Längsrichtung mit der Kraft  $P$  belasteten Balkens nach der Theorie II. Ordnung:

$$EI_y w'''' + Pw'' + \beta w = 0$$



– Kritische Längskraft:

$$P_{\text{krit}} = \frac{I_y E}{l^2} \pi^2 m^2 + \beta \frac{l^2}{\pi^2 m^2}$$

– Minimale kritische Längskraft:

$$P_{\text{krit}_{\text{min}}} = 2\sqrt{\beta I_y E}$$

$m$  : Wellenzahl

$\beta$  : Bettungsziffer

### 3.4 Biegedrillknicken

Annahmen und Voraussetzungen:

- Die Querschnittsform bleibt erhalten
- Der Stab ist schubstarr
- An beiden Enden gelenkig, torsionssteif und wölbfrei gelagert
- Die Druckkraft greift im Schwerpunkt an
- Der Querschnitt dreht sich um den Schubmittelpunkt

Für die möglichen Knickfälle gilt:

$$P_{krT} = \frac{1}{\rho_{SMP}^2} \left( I_T G + C_T E \frac{c\pi^2}{l^2} \right)$$

$$P_{kr_y} = c \frac{\pi^2 I_y E}{l^2}$$

$$P_{kr_z} = c \frac{\pi^2 I_z E}{l^2}$$

$$\rho_{SMP}^2 = \frac{I_{ySMP} + I_{zSMP}}{A}$$

$\rho_{SMP}$  : Trägheitsradius bezüglich des Schubmittelpunkts

$y, z$  : Hauptträgheitsachsen

Unterscheidung in zwei Fälle:

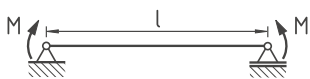

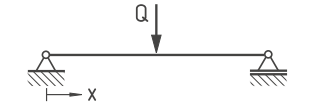
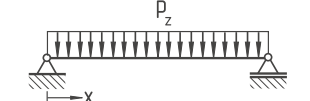
- 1. Fall:  
Schubmittelpunkt und Schwerpunkt fallen zusammen, Biege- und Drillknicken sind entkoppelt.

$$P_{kr} = \min \left( P_{krT}, P_{kr_y}, P_{kr_z} \right)$$

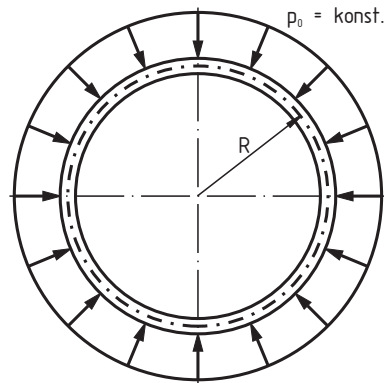
- 2. Fall:  
Schubmittelpunkt und Schwerpunkt fallen nicht zusammen, Biege- und Drillknicken sind gekoppelt.

$$\left( 1 - \frac{P_{kr_y}}{P} \right) \left( 1 - \frac{P_{kr_z}}{P} \right) \left( 1 - \frac{P_{krT}}{P} \right) - \left( 1 - \frac{P_{kr_y}}{P} \right) \frac{z_M^2}{\rho_{SMP}^2} - \left( 1 - \frac{P_{kr_z}}{P} \right) \frac{y_M^2}{\rho_{SMP}^2} = 0$$

Die Lösung für  $P$  mit dem kleinsten Wert ist  $P_{kr}$ .

Belastung	$M_y$	kritische Last
	$M$	$M_{krit} = \frac{\pi}{l} \sqrt{E I_z G I_T}$
	$-Qx$	$Q_{krit} \approx \frac{4}{l^2} \sqrt{E I_z G I_T}$
	$\frac{Q}{2}x$ für $(0 \leq x \leq \frac{l}{2})$	$Q_{krit} \approx \frac{16,9}{l^2} \sqrt{E I_z G I_T}$
	$\frac{p_z l^2}{2} \left[ \left( \frac{x}{l} \right) - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]$	$p_{zkrit} \approx \frac{28,3}{l^3} \sqrt{E I_z G I_T}$

### 3.5 Der Kreisring unter gleichmäßigem statischen Druck



– Kritische Knicklast:

$$N_{0krm} = -\frac{(m^2 - 1) IE}{R^2}$$

– Kritischer Außendruck:

$$p_{0krm} = \frac{(m^2 - 1) IE}{R^3}$$

Die minimale Beanspruchung ergibt sich für  $m = 2$ .

### 3.6 Die ebene, rechteckige Platte

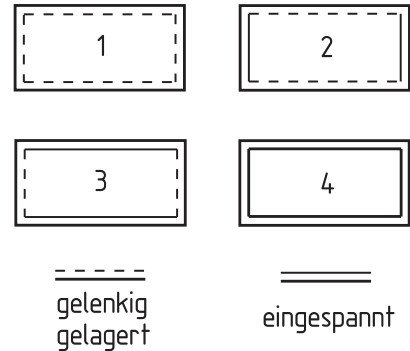
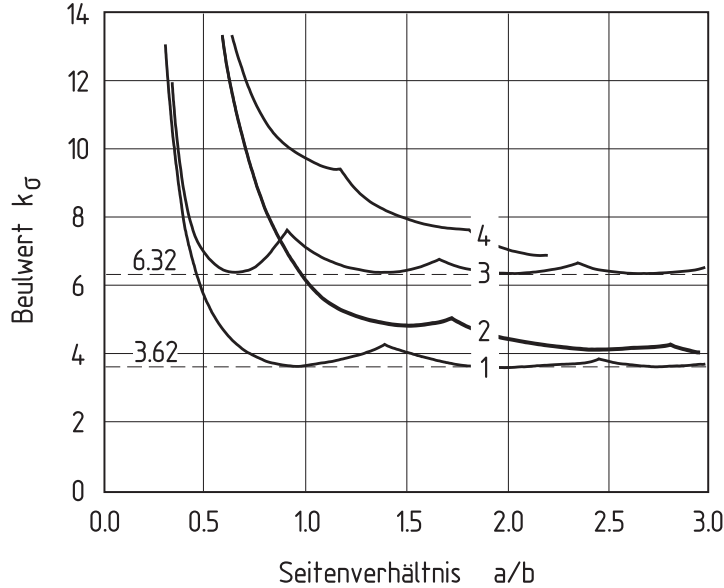
Die folgenden Beziehungen gelten für konstanten Axialdruck!

- An den belasteten Rändern gelenkig gelagerte Platte mit freien Längsrändern (Analogie zum Druckstab):

$$\sigma_{kr} = 0,904 \cdot E \left(\frac{s}{a}\right)^2$$

$a$  : Plattenlänge in Lastrichtung  
 $s$  : Plattendicke

- An allen vier Rändern gelagerte Platte:

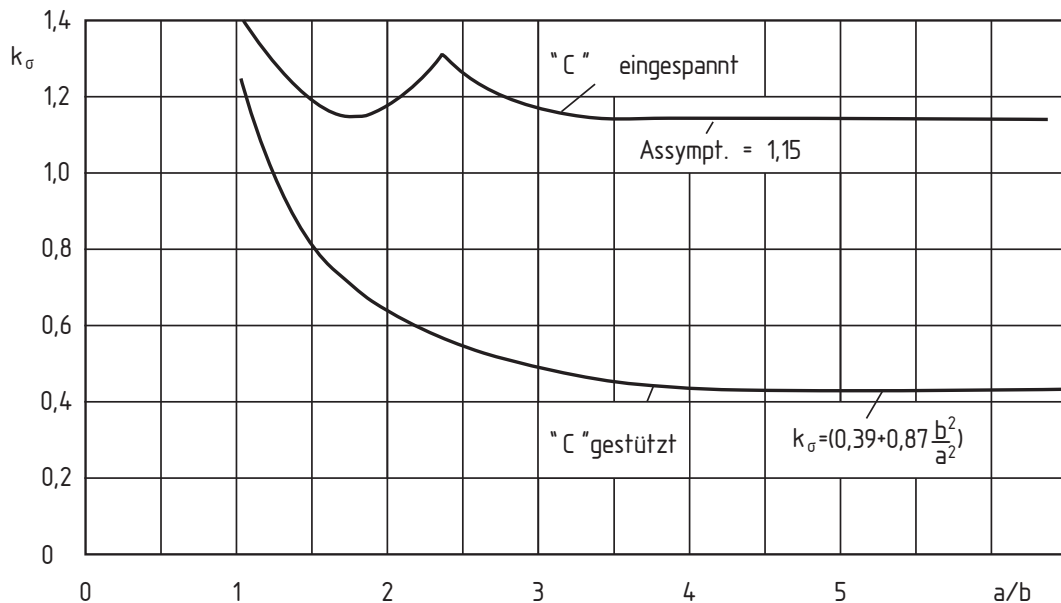


$$\sigma_{kr} = k_{\sigma} E \left(\frac{s}{b}\right)^2$$

Praxis: Berechnung mit dem Minimum aller Girlandenkurven für die jeweilige Randbedingung.

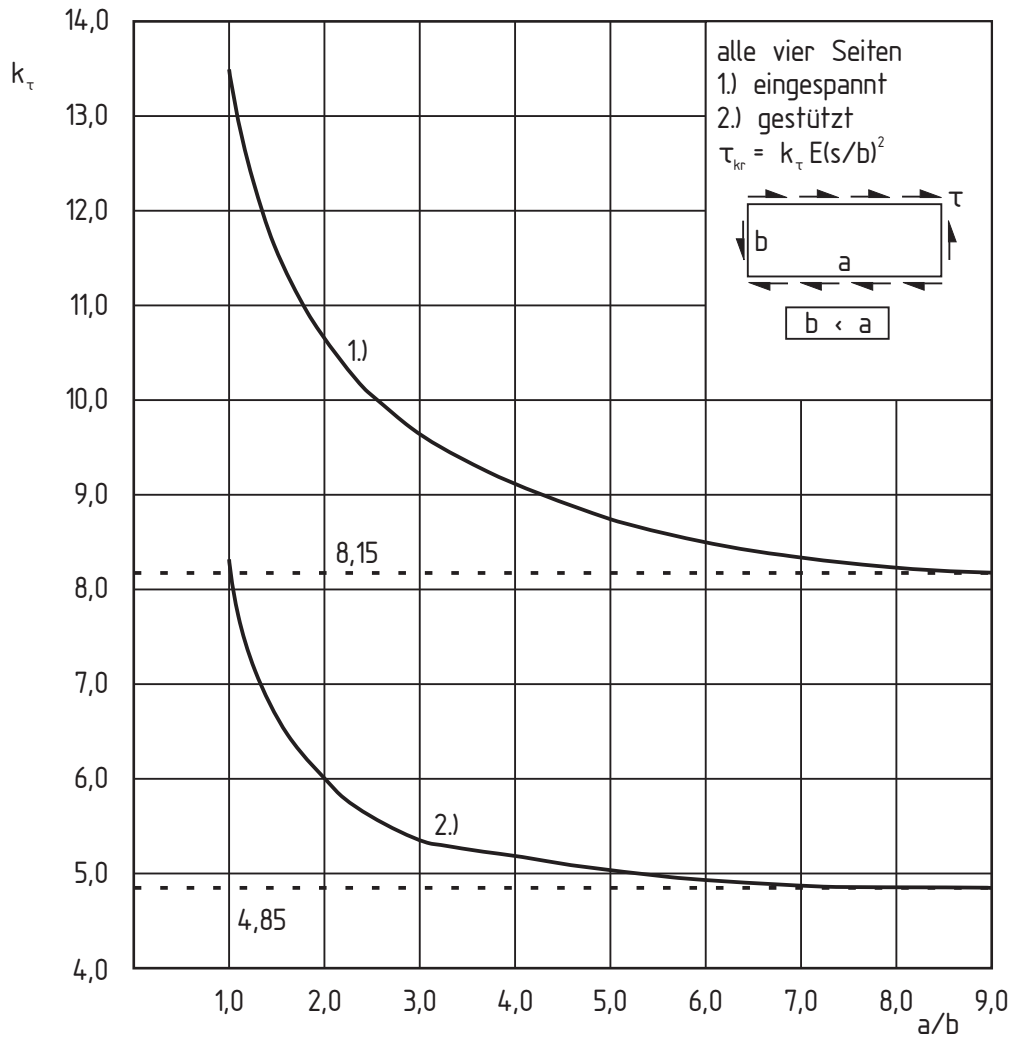
- An drei Rändern gestützte Platte:

$$\sigma_{kr} = k_{\sigma} E \left(\frac{s}{b}\right)^2$$



- Platte unter Schub:  
für  $b < a$ :

$$\tau_{kr} = k_{\tau} \cdot E \left(\frac{s}{b}\right)^2$$



Interaktion bei gemeinsamer Druck- und Schubbelastung:

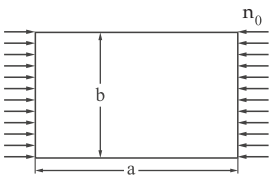
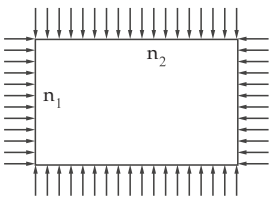
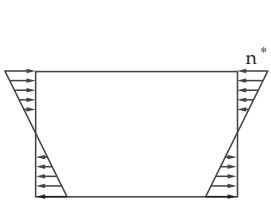
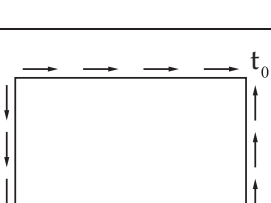
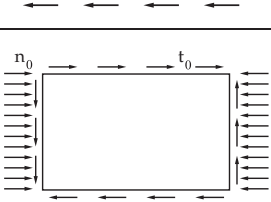
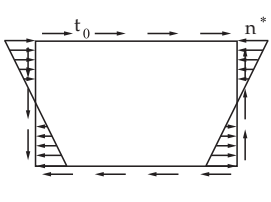
$$\frac{\sigma_x^j}{\sigma_{xkr}} + \frac{\sigma_y^j}{\sigma_{ykr}} + \left(\frac{\tau^j}{\tau_{kr}}\right)^2 \leq 1$$

- Einfluß der Plastizität analog zum Stab:

$$\frac{\sigma_{kr}}{E_{red}} = k \left(\frac{s}{b}\right)^2$$

$$E_{red} = \sqrt{E E_K}$$

– Beulwerte der allseits gelenkig gelagerten Rechteckplatte

Systemskizze	Lastfall	Beulformel	Näherung $N_{krit} = kN_e$
	Einseitiger Druck	$n_{0krit} = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\alpha}{m}\right)^2 n_e$	$k \approx 4$ für $\alpha \geq 1$
	Beidseitiger Druck	$n_{1krit} = \frac{\left(\frac{m}{\alpha} + n^2 \frac{\alpha}{m}\right)^2}{1 + \frac{N_2}{N_1} \frac{\alpha^2}{m^2} n^2} n_e$	$k = 2$ für $a=b$ und $n_1 = n_2$
	Reine Biegung	$n_{krit}^* = kn_e$	$k \approx \frac{1,87}{\alpha^2} + 8,6\alpha^2 + 15,87$ für $\alpha \leq \frac{2}{3}$ , $k \approx 23,9$ für $\alpha \geq \frac{2}{3}$
	konstanter Schub	$t_{0krit} = kn_e$	$k = \frac{4,0}{\alpha^2} + 5,34$ für $\alpha \geq 1$ , $k = \frac{5,34}{\alpha^2} + 4,0$ für $\alpha \leq 1$
	Längskraft + Schub	$n_{0krit}, n_{0krit}^* \hat{=} \hat{=}$ Beullast für $t_0 = 0$	$\frac{n_{krit}}{n_{0krit}} \approx 1 - \left(\frac{t_0}{t_{0krit}}\right)^2$
	Biegung + Schub	$t_{0krit} \hat{=} \hat{=}$ Beullast für $n = 0$ bzw. $n^* = 0$	$\frac{n_{krit}^*}{n_{0krit}} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{t_0}{t_{0krit}}\right)^2}$

$$n_e = \frac{\pi^2 K}{b^2}; \quad \alpha = \frac{a}{b}; \quad K = \frac{E \cdot s^3}{12(1 - \nu^2)}$$

### 3.7 Örtliches Beulen dünnwandiger Profile

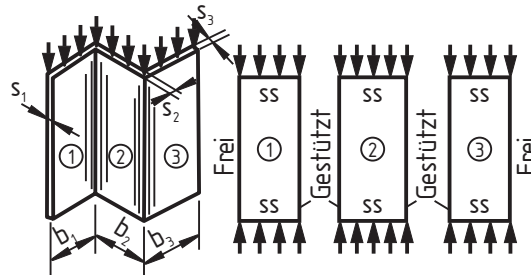
– Einseitig gestützter Einzelstreifen:

$$\sigma_{kri} = 0,39 \cdot E \left(\frac{s_i}{b_i}\right)^2$$

- Beidseitig gestützter Einzelstreifen:

$$\sigma_{kr_i} = 3,62 \cdot E \left( \frac{s_i}{b_i} \right)^2$$

- Randbedingungen des Einzelstreifens (siehe Skizze):



- Die kritische Beulspannung ergibt sich dann zu:

$$\sigma_{kr_{\text{örtl}}} = \frac{\sum_i b_i s_i \sigma_{kr_i}}{\sum_i b_i s_i}$$

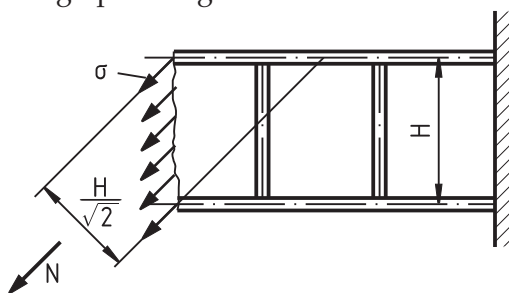
Gegebenenfalls ist für die  $\sigma_{kr_i}$  eine plastische Korrektur durchzuführen!

### 3.8 Das Diagonalzugfeld (Wagnerträger)

Von einem Diagonalzugfeld spricht man dann, wenn ein Schubfeldträger so hoch belastet wird, daß das Schubfeld ausbeult.

Im Vergleich zum Schubfeldträger ergeben sich

- Längsspannung  $\sigma^+$ :

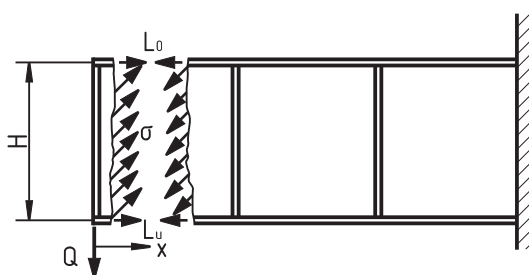


$$\tau_0 = \frac{Q}{sH}$$

$$N = \sigma s \frac{H}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma = 2 \frac{Q}{sH} = 2\tau_0$$

- Zusätzliche Gurtkräfte:



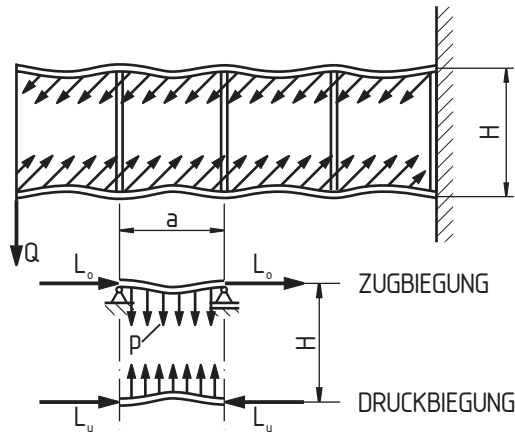
- Entlastung des Zuggurts:

$$L_0 = \frac{Q}{H}x - \frac{Q}{2}$$

- Überlastung des Druckgurts:

$$L_u = -\frac{Q}{H}x - \frac{Q}{2}$$

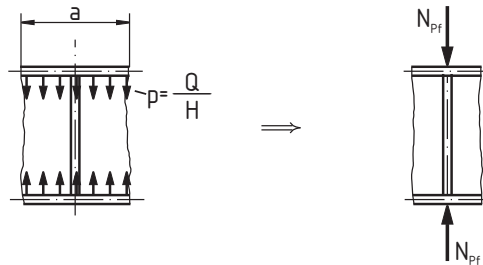
- Biegung in den Gurten:



$$p = \frac{Q}{H}$$

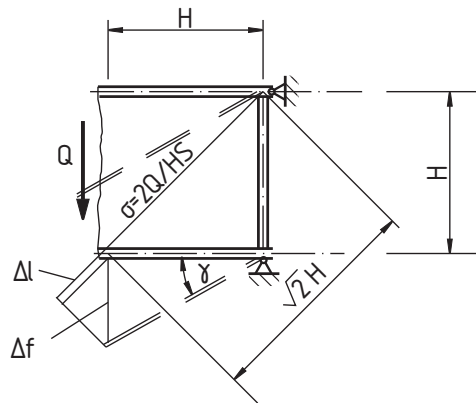
$$M_V = M_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{P_{krit}}}$$

- Druckbelastung der Pfosten:



$$N_{pf} = \frac{Qa}{H}$$

- Größere Schubverformungen:



- Dehnung infolge  $\sigma$ :

$$\Delta l = \epsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \sqrt{2} H = \frac{2\tau_0}{E} \sqrt{2} H$$

- Vertikale Verformung:

$$\Delta f = \Delta l \sqrt{2} = 4 \frac{\tau_0}{E} H$$

- Schubverformung:

$$\gamma = \frac{\Delta f}{H} = 4 \frac{\tau_0}{E} = \frac{\tau_0}{G_{\ddot{a}}}$$

- Äquivalenter Schubmodul:

$$G_{\ddot{a}} = \frac{E}{4} = 0,65 \cdot G$$

### 3.9 Stabilität der Zylinderschale

#### 3.9.1 Die isotrope Schale

- Theoretische Beullast für Ring- und Schachbrettbeulen bei Axialdruck:

$$\sigma_{x_{kr_{th}}} = 0,605 \cdot E \frac{s}{R}$$

Abminderungsfaktor (Almroth):

$$\rho_{99} = 6,48 \cdot \left(\frac{R}{s}\right)^{-0,54}$$

$$\Rightarrow \sigma_{x_{kr}} = \rho_{99} \sigma_{x_{kr_{th}}} = 3,92 \cdot E \left(\frac{s}{R}\right)^{1,54}$$

- Außendruck:

$$p_{kr} = \rho_{au} \cdot 0,92 \cdot c E \frac{R}{l} \left(\frac{s}{R}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Mit  $\sigma_{\varphi} = \frac{pR}{s} \Rightarrow$

$$\sigma_{\varphi_{kr}} = \rho_{au} \cdot 0,92 \cdot c E \frac{R}{l} \left(\frac{s}{R}\right)^{1,5}$$

Abminderungsfaktor bei Außendruck:

$$\rho_{au} = 0,7$$

$c$  : abhängig von Randbedingungen (beidseitig gelenkig gelagerte Schale  $c = 1$ )

- Torsion:

$$\tau_{kr} = \rho_{\tau} \cdot 0,74 \cdot E \left(\frac{s}{R}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{R}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

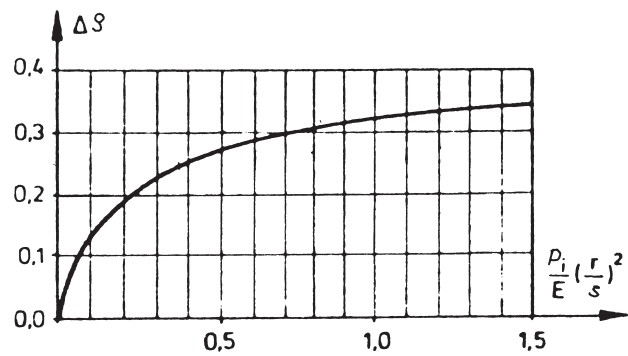
Abminderungsfaktor bei Torsion:

$$\rho_{\tau} = 0,65$$

- kombinierte Belastung:

$$\left(\frac{\sigma_x \cdot j}{\sigma_{x_{kr}}}\right)^{1,1} + \left(\frac{\sigma_{\varphi} \cdot j}{\sigma_{\varphi_{kr}}}\right)^{1,1} + \left(\frac{\tau \cdot j}{\tau_{kr}}\right)^2 \leq 1$$

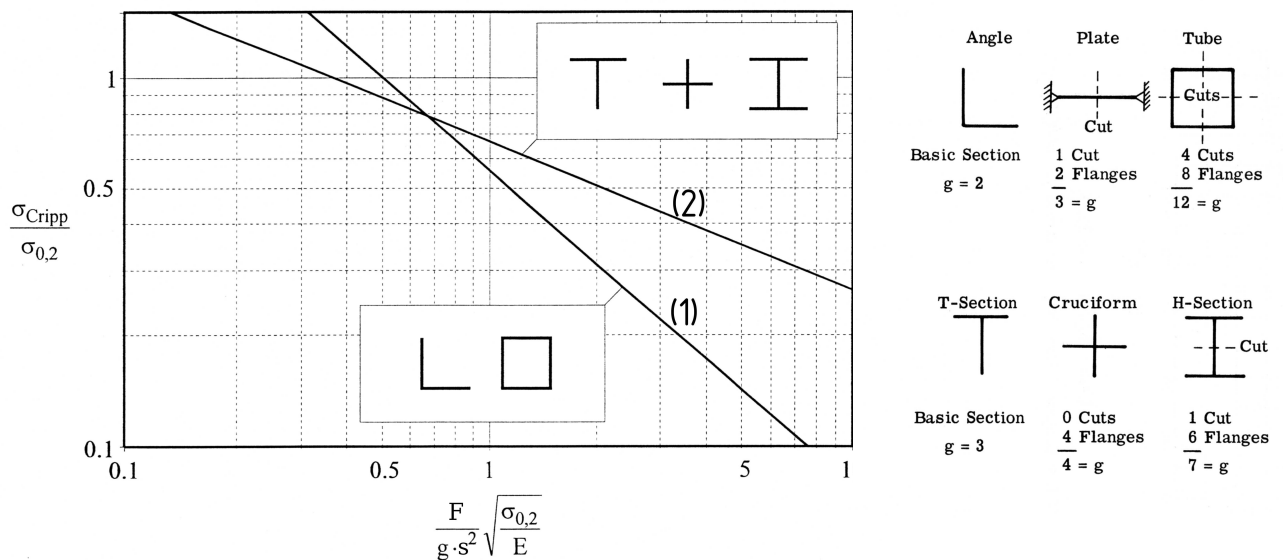
- Innendruck  $\Rightarrow$  Erhöhung des Abminderungsfaktors um  $\Delta\rho$ :



### 3.9.2 Die orthotrop versteifte Zylinderschale

- Örtliches Versagen der Stringerprofile (Crippling) - Methode nach Gerard

Die Crippling-Spannung läßt sich mit folgendem Diagramm bestimmen:



$$(1) \quad \frac{\sigma_{cripp}}{\sigma_{0,2}} = 0,56 \left[ \left( \frac{g s^2}{F} \right) \left( \frac{E}{\sigma_{0,2}} \right)^{0,5} \right]^{0,85}$$

$$(2) \quad \frac{\sigma_{cripp}}{\sigma_{0,2}} = 0,67 \left[ \left( \frac{g s^2}{F} \right) \left( \frac{E}{\sigma_{0,2}} \right)^{0,5} \right]^{0,40}$$

Es gilt:

$$\frac{\sigma_{cripp}}{\sigma_{0,2}} < 0,8 \dots 1,0$$

$g$  : Anzahl der erforderlichen Schnitte, um Profile aus einfachen Flanschen zu erhalten inklusive der Anzahl der einfachen Flansche

$s$  : Wanddicke des Profils

$F$  : Querschnittsfläche des Profils

– Teilschaleninstabilität – Knicken von Stringern und mittragender Haut zwischen den Spanten

– Kritische Last für dünnwandige torsionssteife Profile nach Euler-Johnson:

$$\frac{\sigma_{kr}}{E} = \frac{\sigma_{cripp}}{E} - \left( \frac{\lambda'}{2\pi} \frac{\sigma_{cripp}}{E} \right)^2$$

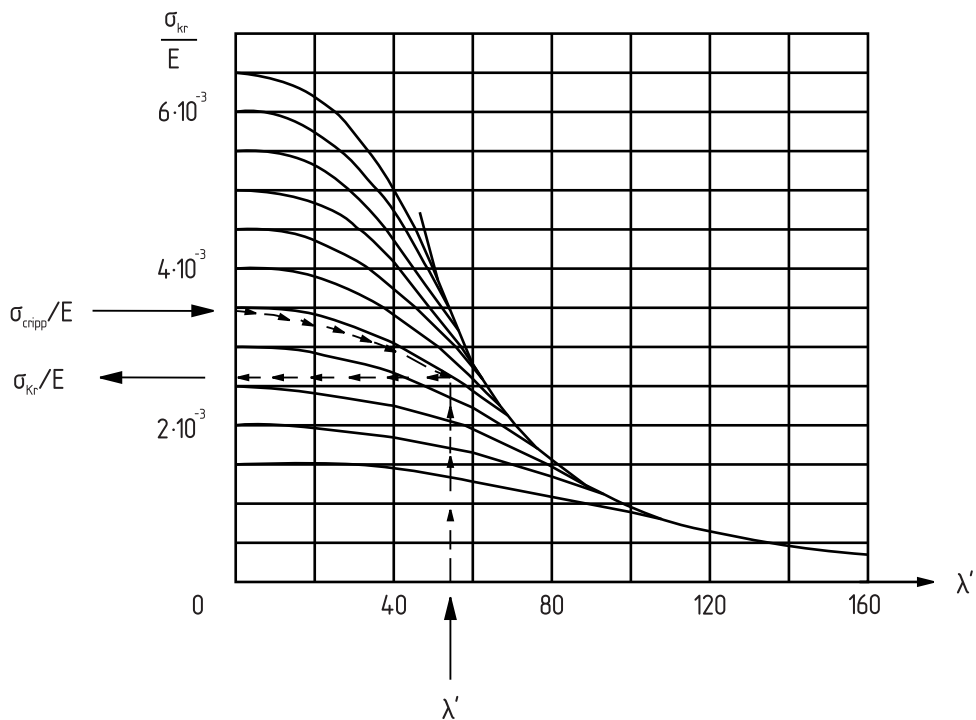
mit

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{c}}$$

$c = 1$  für torsionsweiche Spante

$c \approx 2$  für torsionssteife Spante

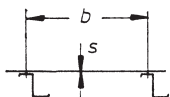
$\lambda$  : Schlankheitsgrad (siehe Kap. 2.1)



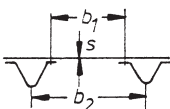
– Mittragende Breite  $b_m$  nach Marguerre (Näherung):

$$\frac{b_m}{b} = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{krB}}{\sigma_{Pr}}}$$

– Kritische Beulspannung bei ebenen Blechen  $\sigma_{krB} = \sigma_{krb}$ :



$$\sigma_{krb} = 3,62 \cdot E \left( \frac{s}{b} \right)^2$$



$$\sigma_{krb} = 6,32 \cdot E \left( \frac{s}{b_1} \right)^2$$

- Abschätzung der Beulspannung bei gekrümmten Blechen:

$$\sigma_{kr_B} = \sigma_{kr_b} + \sigma_{kr_R}$$

mit

$$\sigma_{kr_R} = 3,92 \cdot E \left( \frac{s}{R} \right)^{1,54}$$

- Mittragende Breite unter Berücksichtigung des Beulens zwischen den Nieten:

$$\frac{b_m}{b} = \frac{\sigma_{kr,e}}{\sigma_{Pr}} \sqrt[3]{\frac{\sigma_{kr_B}}{\sigma_{Pr}}}$$

- Universalnieten:

$$\sigma_{kr,e} \cong 2 \cdot E \left( \frac{s}{e} \right)^2$$

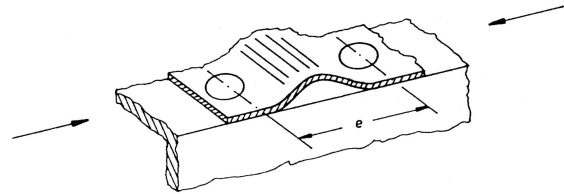
$b_m$  : effektive mittragende Breite

$b$  : Profilteilung

$\sigma_{kr_B}$  : kritische Beulspannung des Bleches

$\sigma_{Pr}$  : Spannung im Profil

$e$  : Nietabstand



- Allgemeine Instabilität

- Erforderliche Spantsteifigkeit nach Shanley

(Bei außenliegenden Spanten konservativ. Bei innenliegenden Spanten optimistisch  
 $\Rightarrow$  Spantsteifigkeit verdoppeln)

- Belastung durch ein Biegemoment:

$$(E \cdot I)_{Spant} \geq \frac{1}{4000} \frac{MR^2}{l}$$

$l$ : Abstand zwischen den Spanten

- Belastung durch Axialdruck:  $P_x = 2\pi R n_x$

$$(E \cdot I)_{Spant} \geq \frac{n_x R^4}{1273 \cdot l} ; n_x \geq 1,1 \cdot n_{kr,Tsi} ; n_{kr,Tsi} = \frac{P_{Kr}}{b} = \sigma_{kr,Tsi} \cdot \frac{F_{Str+mittr.Br.}}{b}$$

- Abminderungsfaktor für orthotrope Schalen nach Almroth

$$\rho_{99} = 6,48 \cdot \left( \frac{R}{s} \right)_e^{-0,54}$$

mit

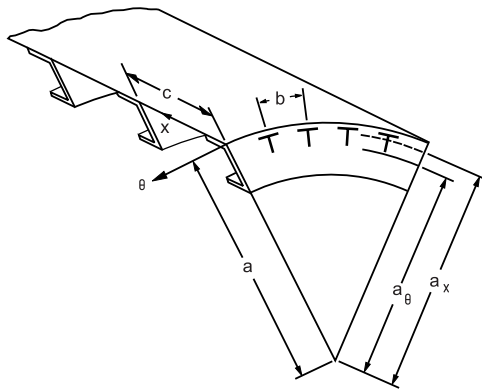
$$\left( \frac{R}{s} \right)_e = 0,428 \cdot R \sqrt{\frac{s_x}{\bar{I}_x + \bar{I}_R}}$$

$s_x$  : verschmierte Wanddicke in Längsrichtung

$\bar{I}_x$  : verschmiertes axiales Trägheitsmoment der Stringer (einschl. mittragender Haut)

$\bar{I}_R$  : verschmiertes axiales Trägheitsmoment der Spante (einschl. mittragender Haut)

– Verfahren nach van der Neut für orthotrop versteifte Schalen:



$$n_{krit} = \rho n_{kritth}$$

$$n_{kritth} = \eta_{min} n_{kritsym}$$

$$n_{kritsym} = 2E \sqrt{\frac{i_x h_\theta}{a_x a_\theta}}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{(Y + A + \frac{1}{Y})(Y + B + \frac{C}{Y}) + F^2} - F}{Y + A + \frac{1}{Y}}$$

$\eta$  ergibt sich als Funktion von  $Y$ , das Minimum liegt in der Nähe von

$$Y \cong \sqrt{C}$$

$$A = \frac{E}{G_{\ddot{u}}} \sqrt{\frac{h_\theta h_x a_x}{h^2 a_\theta}}$$

$$B = \frac{G i_{x\theta} a_x^2 + i_{\theta x} a a_x}{E a_\theta^2 i_x \sqrt{\frac{h_\theta a_x^3}{h_x a_\theta a^2}}}$$

$$C = \frac{i_\theta a^3 h_x}{i_x a_\theta^3 h_\theta}$$

$$F = \frac{(a - a_x) a_\theta + (a - a_\theta) a}{\sqrt{\frac{i_x a_\theta^2}{h_x}}}$$

$$Y = \left(\frac{l_\theta}{l_x}\right)^2 \sqrt{\frac{h_x a_\theta a^2}{h_\theta a_x^3}}$$

Weitere Zusammenhänge:

$$h_x = \frac{A_s a}{b a_x}$$

$$h_\theta = \frac{A_\theta}{c}$$

$$i_x = \frac{I_s a}{b a_x}$$

$$i_\theta = \frac{I_\theta}{c}$$

$$i_{x\theta} = \frac{I_{x\theta} a}{b a_x}$$

$$i_{\theta x} = \frac{I_{\theta x}}{c}$$

Halbwellenlänge:

$$l_x = \pi \sqrt[4]{\frac{i_x a_x a_\theta}{h_\theta}}$$

- $a$  : Schalenradius
- $a_x$  : Radius der Stringerschwerpunkte (einschl. mittr. Haut)
- $a_\theta$  : Radius der Spantschwerpunkte (einschl. mittr. Haut)
- $b$  : Stringerteilung
- $c$  : Spantenteilung
- $h$  : Wanddicke der Schalenhaut
- $h_x$  : verschmierte Wanddicke in Stringerrichtung
- $h_\theta$  : verschmierte Wanddicke in Spantrichtung
- $A_s$  : Stringerquerschnitt (einschl. mittr. Haut)
- $A_\theta$  : Spantquerschnitt (einschl. mittr. Haut)
- $I_s$  : axiales Stringerträgheitsmoment (einschl. mittr. Haut)
- $I_\theta$  : axiales Spantträgheitsmoment (einschl. mittr. Haut)
- $I_{x\theta}$  : Stringerdrillträgheitsmoment (einschl. mittr. Haut)
- $I_{\theta x}$  : Spantdrillträgheitsmoment (einschl. mittr. Haut)
- $l_x$  : Halbwellenlänge in Längsrichtung
- $l_\theta$  : Halbwellenlänge in Umfangsrichtung

### 3.10 Sandwichstrukturen

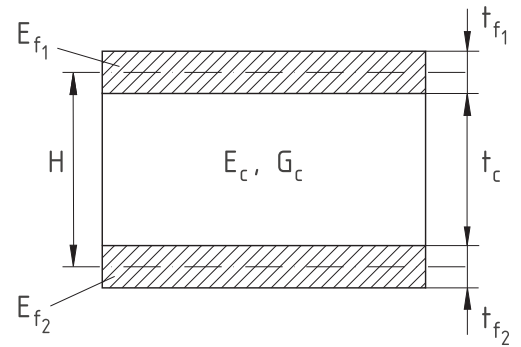
– Definitionen:

– Biegesteifigkeit:

$$D = \frac{E_f t_f H^2}{2(1 - \nu^2)} + \frac{E_f t_f^3}{6(1 - \nu^2)}$$

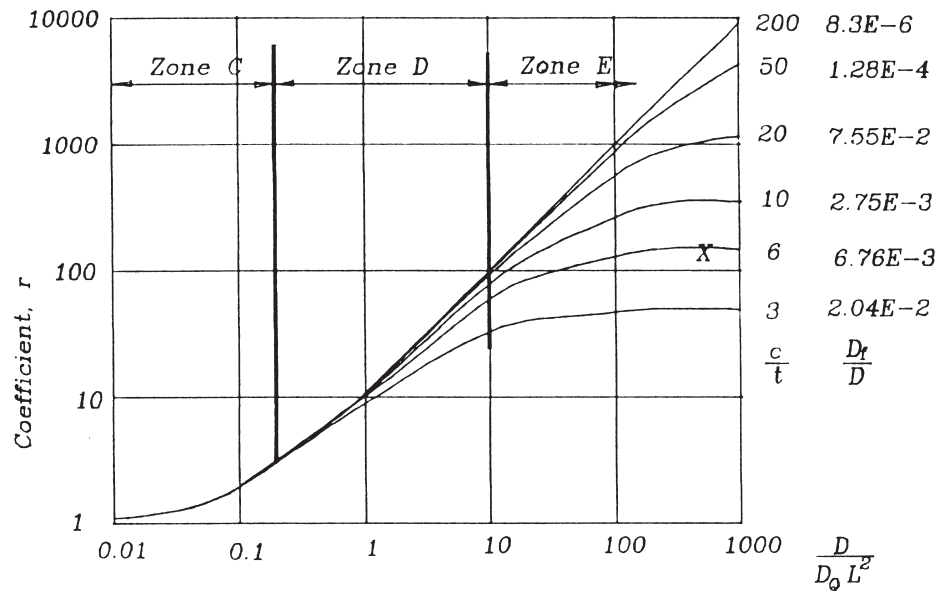
– Schubsteifigkeit:

$$D_Q = \frac{G_c H^2}{t_c}$$



– Sandwich Master Diagramm:

$$r = \frac{1 + \left(1 - \frac{D_f}{D}\right) \left(\frac{\pi^2 D}{L^2 D_Q}\right)}{1 + \left(1 - \frac{D_f}{D}\right) \left(\frac{\pi^2 D}{L^2 D_Q}\right) \left(\frac{D_f}{D}\right)}$$



– Stabilität beim Sandwich:

– Knittern einer Deckschicht – tritt nur bei relativ hohem Sandwich auf, d.h. wenn

$$\frac{t_c}{t_f} > 1,44 \sqrt[3]{\frac{E_c E_f}{G_c^2}}$$

⇒ Knitterspannung für das Knittern einer Deckschicht  $\sigma_{kn}$

$$\sigma_{kn} = 0,5 \sqrt[3]{E_c G_c E_f}$$

– Knittern beider Deckschichten:

- symmetrisches Knittern:  $\sigma_{kn_{sym}} = \sqrt{\frac{E_f E_c t_f}{3H}}$

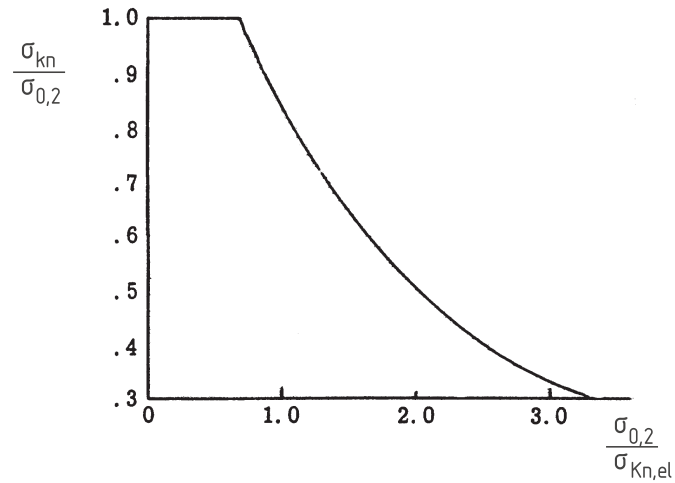
- antimetrisches Knittern:  $\sigma_{kn_{an}} = \frac{G_c H}{2 t_f}$

- Intracell-Beulen (Honigwabenkern):

$$\sigma_{int} = 0,75 \cdot E_f \left( \frac{t_f}{d} \right)^{1,5}$$

$d$ : Schlüsselweite der Wabe

- Plastische Korrektur für die elastisch gerechnete Knitterspannung:

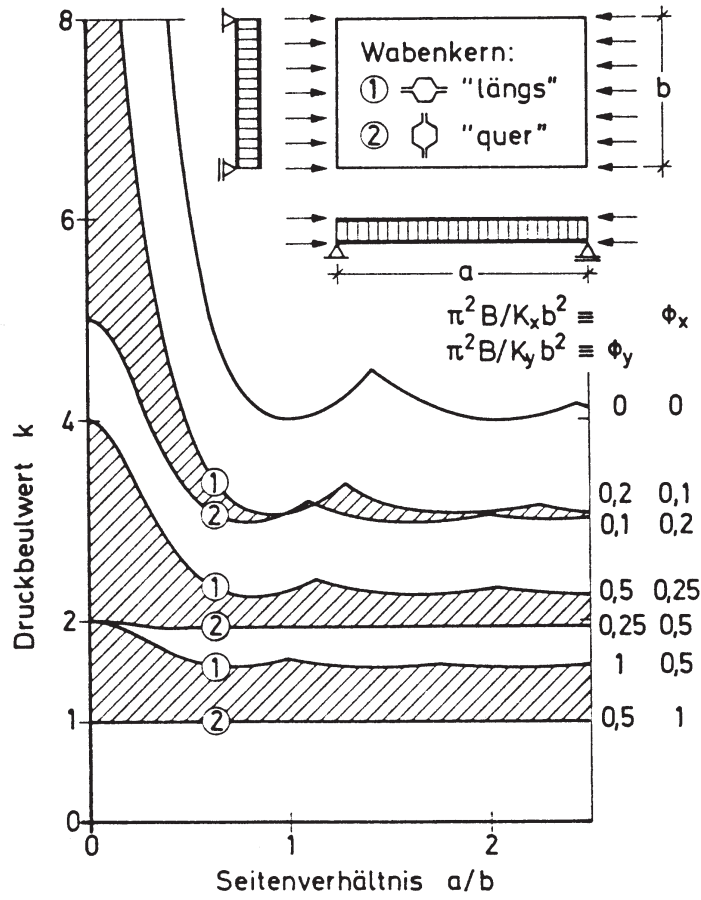


$E_f$  : E-Modul der Decklagen

$E_c$  : E-Modul des Kerns

$G_c$  : Schubmodul des Kerns

– Allgemeine Instabilität für eine rechteckige Platte, gelenkig gestützt bei Axialdruck:



$$n_{kr} = k \cdot B \frac{\pi^2}{b^2}$$

$$B = D = \frac{E_f \cdot t_f \cdot H^2}{2(1-\nu^2)}$$

$$K_x = D_{Q_x} = \frac{G_{cx} \cdot H^2}{t_c}$$

$$K_y = D_{Q_y} = \frac{G_{cy} \cdot H^2}{t_c}$$

– Allgemeine Instabilität für eine Zylinderschale, gelenkig gestützt bei Axialdruck:

– Kritische Beullast der Schale mit der Länge  $L$ :

$$n_{kr} = k_x D \frac{\pi^2}{L^2}$$

– Berechnung des Beulfaktors  $k_x$  bei mäßig langen Zylindern mit schubstarrem Kern:

$$k_x = \frac{2}{\pi^2 \sqrt{1 - \nu^2}} \gamma Z \quad \text{für } \gamma \cdot Z > \frac{\sqrt{3} \pi^2}{2}$$

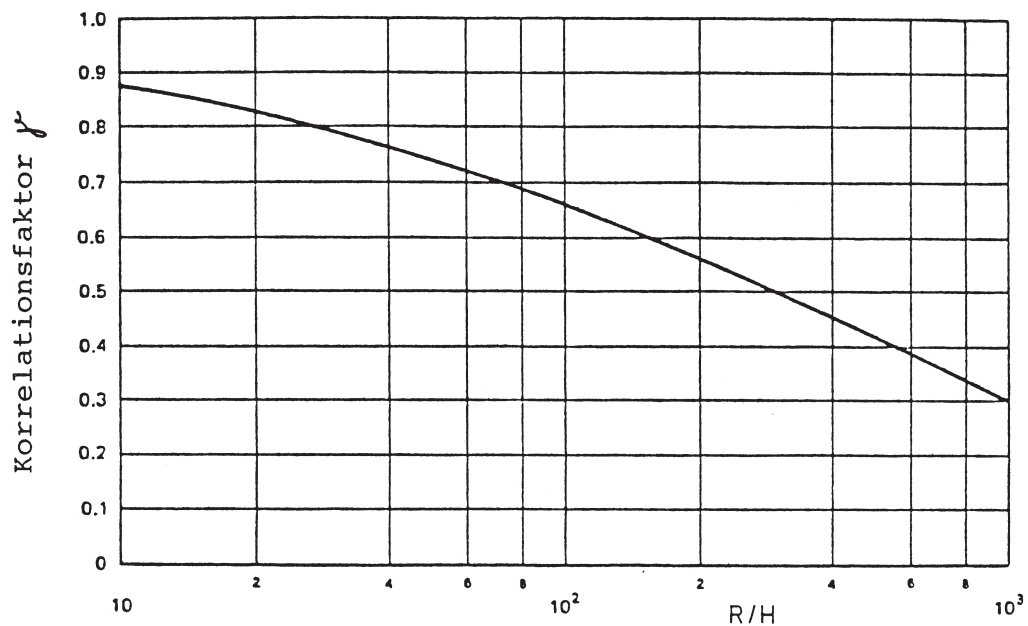
– Krümmungsparameter  $Z$ :

$$Z = 2 \frac{L^2}{RH} \sqrt{1 - \nu^2}$$

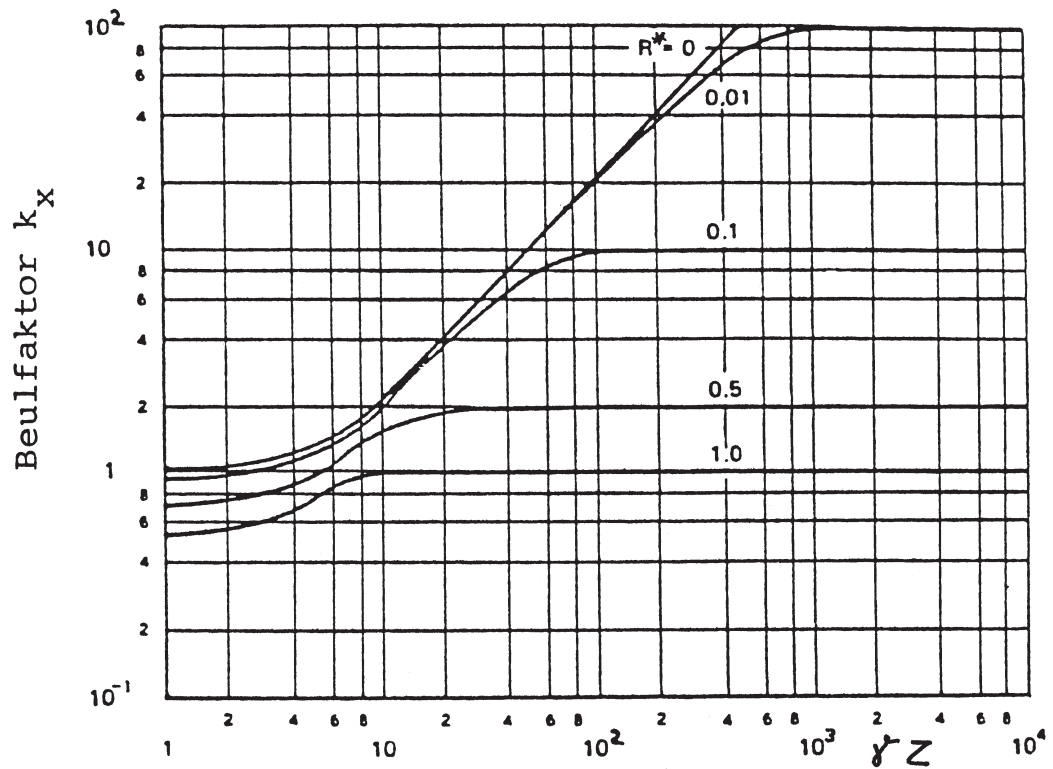
– Biegesteifigkeit für gleich dicke Decklagen:

$$D = \frac{E_f t_f H^2}{2(1 - \nu^2)}$$

– Korrelationsfaktor  $\gamma$ :



–  $k_x$  bei Berücksichtigung der Schubnachgiebigkeit des Kerns:



$$R^* = \frac{\Pi^2 D}{L^2 D_Q}$$

$$D_Q = G_c \frac{H^2}{t_c}$$

– alternativ

$$\text{für } \gamma Z < \frac{10}{R^*} \Rightarrow k_{x_{sch}} = \frac{k_{x_{starr}}}{r} \quad (*)$$

$$\text{für } \gamma Z > \frac{10}{R^*} \Rightarrow k_{x_{sch}} = \frac{1}{R^*} \Rightarrow n_{kr} = G_x \frac{H^2}{t_c}$$

(\*)  $r$  aus Sandwich Master Diagramm