

Grundlagen des Strukturentwurfs

Formelsammlung

Institut für Leichtbau, RWTH Aachen

Stand: 24. August 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Werkstoffe	3
2	Elastizitätstheorie Grundlagen	4
3	Allgemeine Formeln	5
4	Fachwerke	6
5	Der Biegebalken	7
5.1	Der Schubweiche Balken	11
5.2	Verbundträger	13
5.3	Plastische Biegung	13
6	Balken unter Querkraftbelastung	15
6.1	Offene dünnwandige Profile	15
6.2	Geschlossene dünnwandige Profile	16
7	Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen	18
7.1	Übertragungsmatrizen $\{W\}$ und Verschiebungsvektoren \vec{u}	18
7.2	Steifigkeitsmatrizen	19
8	Torsion des Balkens	20
8.1	Torsionsmoment	20
8.2	Torsion nach Saint Venant	20
8.3	Wölbkrafttorsion	22
9	Schubfeldträger	24
9.1	Offene Schubfeldträger	24
9.2	Geschlossener Schubfeldträger mit zwei Stegen	24
9.3	Ebene Schubfeldträger	26
10	Anhang	28

1 Werkstoffe

- Hookesches Gesetz (eindimensional):

$$\sigma = \varepsilon E \quad ; \quad \tau = \gamma G$$

- Querkontraktionszahl (Poissonsche Zahl)

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l} \right|$$

- Schubmodul bei isotropen Werkstoffen:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

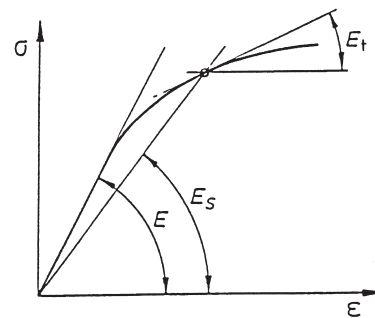
- Definition des E-Moduls bei plastischem Materialverhalten:

- Tangentenmodul:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

- Sekantenmodul:

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



- Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Ramberg-Osgood:

- Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{0,7}}{E} \left[\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} \right)^n \right]$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{pl}}{E} + 0,002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^n$$

$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{17}{7}\right)}{\ln\left(\frac{\sigma_{0,7}}{\sigma_{0,85}}\right)}$$

mit Osgood-Exponent n aus Tabelle (werkstoffspezifisch)

- Tangentenmodul:

$$E_t = \frac{E}{1 + \frac{3}{7} n \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} \right)^{n-1}}$$

$$E_t = \frac{E}{1 + 0,002 n \frac{E}{\sigma_{0,2}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n-1}}$$

- Sekantenmodul:

$$E_s = \frac{E}{1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,7}} \right)^{n-1}}$$

$$E_s = \frac{E}{1 + 0,002 \frac{E}{\sigma_{0,2}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n-1}}$$

2 Elastizitätstheorie Grundlagen

- Gleichgewichtsbedingungen im räumlichen x,y,z -Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} = 0 & \quad \sum_i F_{iy} = 0 & \quad \sum_i F_{iz} = 0 \\ \sum_i M_{ix(\alpha)} = 0 & \quad \sum_i M_{iy(\alpha)} = 0 & \quad \sum_i M_{iz(\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

- Gleichgewichtsbedingungen im ebenen x,z -Koordinatensystem:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i M_{iy(\alpha)} = 0$$

- Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

im Raum:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

in der Ebene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Spannungszustand für isotrope Werkstoffe

im Raum:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{aligned}$$

in der Ebene:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{z.B. dünnwandige Flächentragwerke})$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

- Ebener Verzerrungszustand

es gilt:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - \nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

- Das Hooke'sche Gesetz beschreibt das linear elastische Materialverhalten
Es ist der lineare Zusammenhang zwischen der Kraft und der Längenänderung

3 Allgemeine Formeln

Statische Bestimmtheit

A: Anzahl der Auflagerreaktionen

V: Anzahl der Wertigkeiten der Verbindungselemente

n: Anzahl der Teilsysteme, Stäbe, Bleche

k: Anzahl der Knoten

s: Anzahl der Stäbe

b: Anzahl der Bleche

- Grad der statischen Unbestimmtheit des Fachwerks / des Schubfeldträgers

eben: $U = A + n - 2k$

räumlich: $U = A + n - 3k$

Fachwerk: $n=s$

Schubfeldträger: $n=s+b$

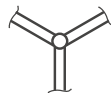
- Grad der statischen Unbestimmtheit U für zweidimensionale Systeme aus starren Körpern:

$$U = A + V - 3n$$

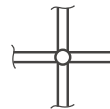
V = 2



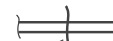
V = 4



V = 6



V = 3



Schnitt, der erforderlich ist, um innerlich statisch bestimmtes System zu erzeugen

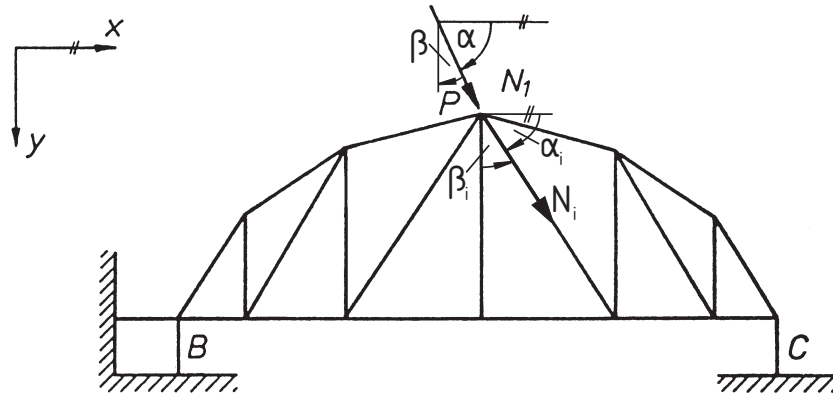
4 Fachwerke

– Gleichgewicht an den Knoten:

$$\sum X = P \cos(\alpha) + \sum N_i \cos(\alpha_i) = 0$$

$$\sum Y = P \cos(\beta) + \sum N_i \cos(\beta_i) = 0$$

$$\sum Z = P \cos(\gamma) + \sum N_i \cos(\gamma_i) = 0$$



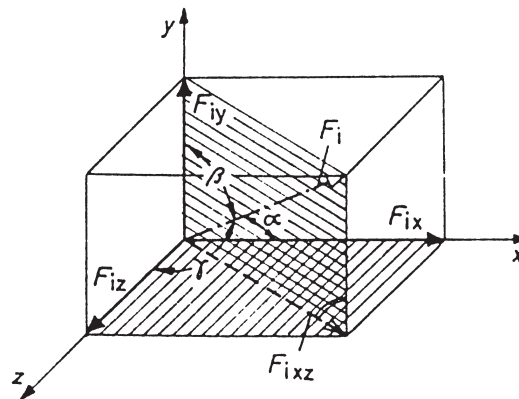
– Dreidimensionale Zerlegung einer Kraft / Ähnlichkeit der Stabkraftkomponenten (F_{ix} , F_{iy} , F_{iz}) zu den Abmessungen des Stabs (l_{ix} , l_{iy} , l_{iz}):

$$l_i = \sqrt{l_{ix}^2 + l_{iy}^2 + l_{iz}^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_{ix}}{F_i} = \frac{l_{ix}}{l_i}$$

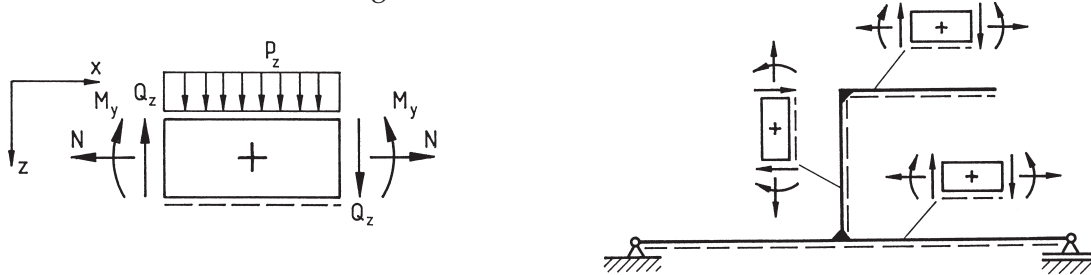
$$\cos \beta = \frac{F_{iy}}{F_i} = \frac{l_{iy}}{l_i}$$

$$\cos \gamma = \frac{F_{iz}}{F_i} = \frac{l_{iz}}{l_i}$$



5 Der Biegebalken

- Normkästchen zur Bestimmung der Schnittkräfte:



- Differentialgleichungen für das Gleichgewicht am Balken:

$$\frac{dQ_z}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

- Lage des Flächenschwerpunkts: $\eta_s = \frac{\int_A \eta dA}{A}$ $\zeta_s = \frac{\int_A \zeta dA}{A}$

dünnwandig: $\eta_s = \frac{\oint \eta h ds}{h ds}$ $\zeta_s = \frac{\oint \zeta h ds}{h ds}$

- Statisches Moment einer Fläche: $S_y = \int_A z dA$ $S_z = \int_A y dA$

dünnwandig: $S_y = \oint z h ds$ $S_z = \oint y h ds$

- Flächenträgheitsmoment: $I_y = \int_A z^2 dA$ $I_z = \int_A y^2 dA$

dünnwandig: $I_y = \oint z^2 h ds$ $I_z = \oint y^2 h ds$

- Deviationsmoment: $I_{yz} = \int_A yz dA$

dünnwandig: $I_{yz} = \oint yzh ds$

- Trägheitsradius:

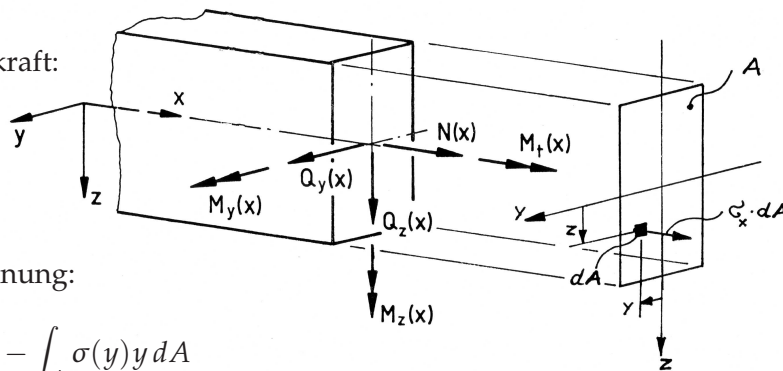
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

- Beziehung zwischen Längsspannung und Normalkraft:

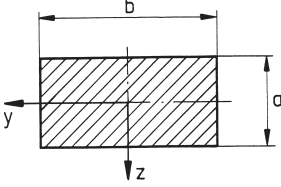
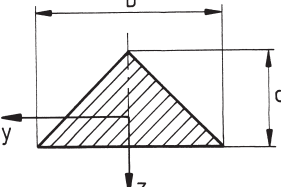
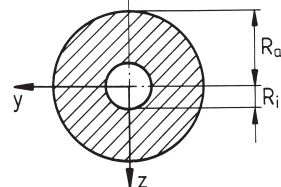
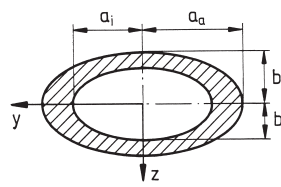
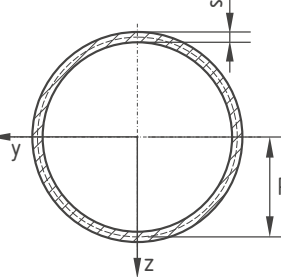
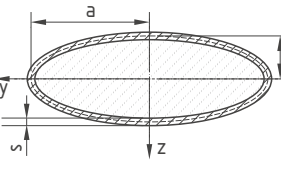
$$N = \int_A \sigma(z) dA$$

- Beziehung zwischen Biegemoment und Längsspannung:

$$M_y = \int_A \sigma(z) z dA \quad ; \quad M_z = - \int_A \sigma(y) y dA$$



Flächenträgheitsmomente für typische Querschnitte:

 $I_y = \frac{ba^3}{12}$ $I_z = \frac{ab^3}{12}$	 $I_y = \frac{ba^3}{36}$ $I_z = \frac{ab^3}{48}$
 $I_y = I_z = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4)$	 $I_y = \frac{\pi}{4} (a_a b_a^3 - a_i b_i^3)$ $I_z = \frac{\pi}{4} (a_a^3 b_a - a_i^3 b_i)$
 <p>dünnwandiger Kreisquerschnitt:</p> $I_y = \pi R^3 s$ $I_z = \pi R^3 s$	<p>dünnwandiger elliptischer Querschnitt:</p>  $I_y = \frac{\pi}{4} s b^2 (b + 3a)$ $I_z = \frac{\pi}{4} s a^2 (a + 3b)$

– Spannungsverteilung für ein beliebiges Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt:

$$\sigma_x(z, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y$$

– Spannungsverteilung für ein Hauptachsensystem im Schwerpunkt:

$$\sigma_x(z, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

– Widerstandsmoment:

$$W_y = \frac{I_y}{|z_{max}|} \quad W_z = \frac{I_z}{|y_{max}|}$$

– polares Flächenträgheitsmoment:

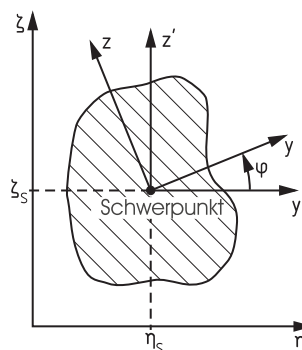
$$I_p = I_y + I_z = \int_A r^2 dA$$

– Koordinatentransformation bei Rotation des Koordinatensystems um φ :

$$\begin{aligned} z &= -y' \sin \varphi + z' \cos \varphi \\ y &= y' \cos \varphi + z' \sin \varphi \end{aligned}$$

– Satz von Steiner:

$$\begin{aligned} I_\eta &= I_{y'} + \zeta_s^2 A \\ I_\zeta &= I_{z'} + \eta_s^2 A \\ I_{\eta\zeta} &= I_{y'z'} + \eta_s \zeta_s A \end{aligned}$$



- Beispiel für ein aus Einzelquerschnittsflächen zusammengesetztes Profil:

$$I_{\eta i} = \frac{B_i \cdot H_i^3}{12} + A_i \cdot \zeta_{Si}^2$$

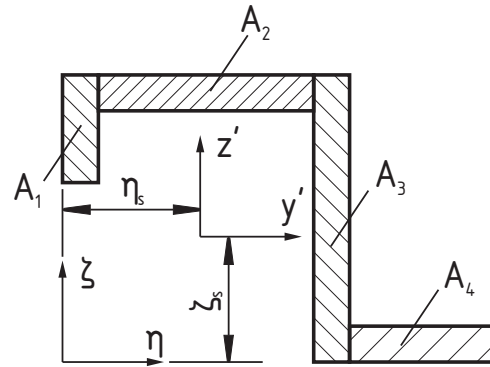
$$I_{\zeta i} = \frac{H_i \cdot B_i^3}{12} + A_i \cdot \eta_{Si}^2$$

$$I_{\eta \zeta i} = A_i \cdot \zeta_{Si} \cdot \eta_{Si}$$

$$I_{y'} = \sum_{i=1}^n I_{\eta i} - A_{ges} \cdot \zeta_S^2$$

$$I_{z'} = \sum_{i=1}^n I_{\zeta i} - A_{ges} \cdot \eta_S^2$$

$$I_{y'z'} = \sum_{i=1}^n I_{\eta \zeta i} - A_{ges} \cdot \zeta_S \cdot \eta_S$$



- Veränderung der Flächenträgheitsmomente und des Deviationsmomentes aufgrund einer Rotation des Koordinatensystems:

$$I_y(\varphi) = \frac{1}{2} (I_{y'} + I_{z'}) + \frac{1}{2} (I_{y'} - I_{z'}) \cos 2\varphi - I_{y'z'} \sin 2\varphi$$

$$I_z(\varphi) = \frac{1}{2} (I_{y'} + I_{z'}) - \frac{1}{2} (I_{y'} - I_{z'}) \cos 2\varphi + I_{y'z'} \sin 2\varphi$$

$$I_{yz}(\varphi) = \frac{1}{2} (I_{y'} - I_{z'}) \sin 2\varphi + I_{y'z'} \cos 2\varphi$$

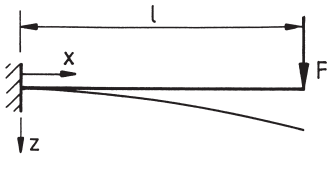
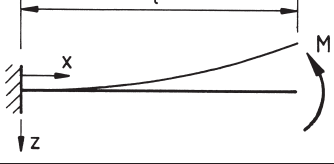
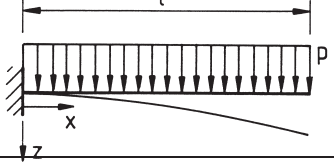
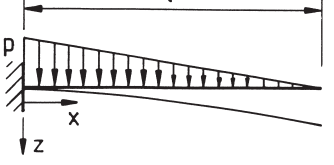
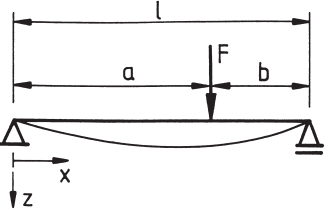
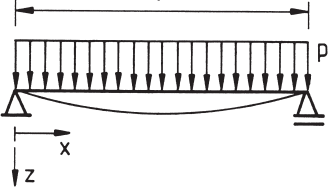
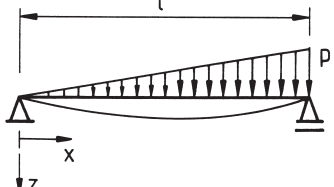
- Lage der Hauptachsen:

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{y'z'}}{I_{y'} - I_{z'}}$$

- Differentialgleichung der Biegelinie im Hauptachsensystem:

$$w'''' I_y E = p(x) \quad \Rightarrow \quad w'''' = -\frac{Q_z}{I_y E} \quad \Rightarrow \quad w'' = -\frac{M_y}{I_y E}$$

Biegelinien für ausgewählte Lastfälle:

	$w = \frac{Fl}{6EI_y} x^2 \left(3 - \frac{x}{l} \right)$
	$w = -\frac{M}{2EI_y} x^2$
	$w = \frac{pl^2}{24EI_y} x^2 \left(6 - 4\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$
	$w = \frac{pl^2}{120EI_y} x^2 \left(10 - 10\frac{x}{l} + 5\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right)$
	$x \leq a : w = \frac{Flb}{6EI_y} x \left(1 - \left(\frac{b}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$ $x \geq a :$ $w = \frac{Fl^2a}{6EI_y} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \right)$
	$w = \frac{pl^3}{24EI_y} x \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(1 + \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$
	$w = \frac{pl^3}{360EI_y} x \left(7 - 10\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^4 \right)$

5.1 Der schubweiche Balken

- Die Verformung w_B des schubstarrten Balkens wird mit der Schubverformung w_S überlagert:

$$w = w_B + w_S$$

- Das Hooke'sche Gesetz (Abhängigkeit der Schubverformung von der Schubspannung):

$$\gamma(z) = \frac{\tau(z)}{G}$$

- Mittlerer Schubwinkel γ_m und Schubkorrekturfaktor κ_z :

$$w'_S = \gamma_m = \kappa_z \frac{\bar{\tau}}{G} = \kappa_z \frac{Q_z}{AG} = \frac{Q_z}{A_{Q_z} G}$$

- Bestimmung von κ_z :

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_z \frac{S_y^2}{B} dz \quad (\text{Vollquerschnitte})$$

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_s \frac{S_y^2}{h} ds \quad (\text{dünnwandige Querschnitte})$$

- Schubtragende Fläche:

$$A_{Q_z} = \frac{A}{\kappa_z}$$

- Näherung für dünnwandige Querschnitte:

$$\kappa_z \approx \frac{A}{\sum A_{Steg}}$$

- Differentialgleichung für schubweiche Balken:

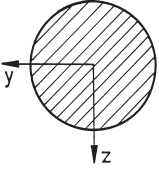
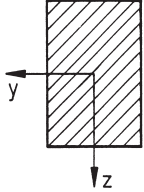
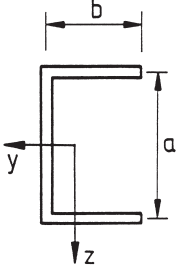
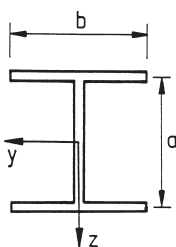
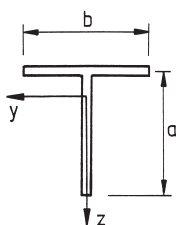
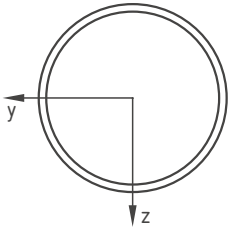
$$w' = w'_B + w'_S = w'_B + \frac{Q_z}{A_{Q_z} \cdot G} \quad \text{bzw. mit} \quad Q_z = -w_B''' \cdot I_y \cdot E$$

$$w' = w'_B - w_B''' \frac{I_y \cdot E}{A_{Q_z} \cdot G}$$

Als Randbedingung müssen die folgenden Beziehungen verwendet werden:

$$\beta = w'_B = w' - \gamma_m \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} Q_z = w'_S A_{Q_z} G \\ M_y = -w_B'' I_y E \end{array}$$

Querschubzahlen κ für verschiedene Profilquerschnitte: $\eta = \frac{a}{b}$

	$\kappa_z = \kappa_y = 1.11$
	$\kappa_z = \kappa_y = 1.2$
	$\kappa_z = \frac{\eta + 2}{(6\eta + \eta^2)^2} \left(24 + 36\eta + 12\eta^2 + \frac{6}{5}\eta^3 \right)$ $\kappa_y = \frac{3(\eta + 2)^3}{(2 + 5\eta + 2\eta^2)^2} \left(\frac{1}{5} + \frac{7}{10}\eta + \frac{4}{5}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^3 \right)$
	$\kappa_z = \frac{\eta + 2}{(6\eta + \eta^2)^2} \left(6 + 36\eta + 12\eta^2 + \frac{6}{5}\eta^3 \right)$ $\kappa_y = \frac{3}{5}(\eta + 2)$
	$\kappa_z = \frac{12(\eta + 1)^3}{\eta^2(4 + 5\eta + \eta^2)^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{8}{5}\eta + \frac{7}{10}\eta^2 + \frac{1}{10}\eta^3 \right)$ $\kappa_y = \frac{6}{5}(\eta + 1)$
	$\kappa_z = \kappa_y = 2.0$

5.2 Verbundträger

- Lage des ideellen Schwerpunktes:

$$e = \frac{\sum_i E_i A_i z_i}{\sum E_i A_i}$$

- Verbunddehnsteifigkeit

$$\overline{EA} = \sum_i E_i A_i$$

- Verbundbiegesteifigkeit

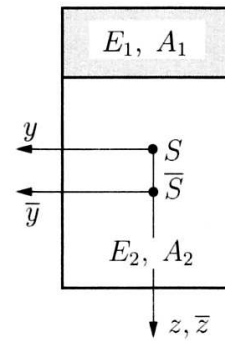
$$\overline{EI} = \sum_i E_i I_i \quad I_i = \int_{A_i} \bar{z}^2 dA$$

- Längskraft:

$$\varepsilon = \frac{N}{\overline{EA}} \quad \sigma_i = N \frac{E_i}{\overline{EA}}$$

- Biegung:

$$w'' = -\frac{M}{\overline{EI}} \quad \sigma_i = \frac{E_i M}{\overline{EI}} \bar{z}$$



5.3 Plastische Biegung

Biegung

- Für $\nu = 0$ gilt:

- ideal-plastisches Materialverhalten:

$$M_{plastisch} = K \cdot M_{elastisch}$$

- reales Materialverhalten - Näherung nach Cozzone:

$$M_{pl,Cozz} = \left[1 + (K - 1) \frac{\sigma_0}{\sigma_M} \right] M_{elastisch}$$

Kombinierte Biegung- Längskraft

- Definitionen:

$$\nu = \frac{N}{A \cdot \sigma_B} \quad \mu = \frac{M}{W \cdot \sigma_B}$$

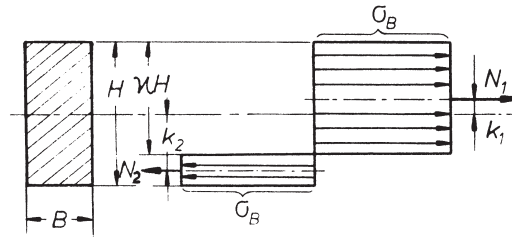
- Interaktionskurven:

- elastisches Materialverhalten:

$$\nu + \mu = 1$$

- ideal-plastisches Materialverhalten (gilt nur für einen rechteckigen Querschnitt, d.h. $K = 1,5$):

$$\mu = 1.5 (1 - \nu^2)$$



- lineare Interaktionskurve:

$$\nu + \frac{1}{\frac{M_{pl}}{M_{el}}} \mu = 1$$

Werte von K (plastische Biegung) für typische Querschnitte:

Skizze	K
	$K = 1.5$
 dünnnes Schubfeld	$K = 1.0$
	$K = 1.5 \left[\frac{h^3 t_2 + 4 h t_1 \cdot (b - t_2) (h - t_1)}{h^3 t_2 + 2 t_1 (b - t_2) (3 h^2 - 6 h t_1 + 4 t_1^2)} \right]$
	$K = 1.5 \left[\frac{h^3 t_2 + h t_1^2 (b - t_2)}{h^3 t_2 + t_1^3 (b - t_2)} \right]$
	$K = 2.0$
	$K = 1.698$
	$K = 1.698 \frac{D(D^3 - d^3)}{D^4 - d^4}$
 dünnwandiges Rohr	$K = 1.27$

6 Balken unter Querkraftbelastung

6.1 Offene dünnwandige Profile

- Formel für den Schubfluss im Hauptachsensystem:

$$t = \frac{Q_z S_y}{I_y} = \tau \cdot h$$

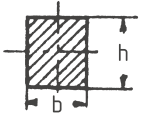
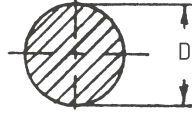

Verbundträger:

- Schubspannung:

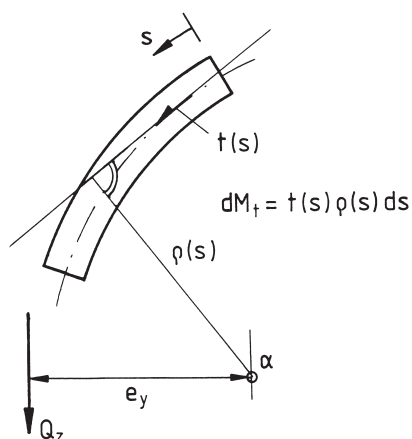
$$\tau_i = \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{b \cdot \bar{EI}}$$

mit $\bar{S}_y = \int_{A_s} E_i \cdot \bar{z} dA$ $\bar{EI} = \sum_i E_i \cdot I_i$

- Maximale Schubspannungen für verschiedene Querschnitte:

Skizze	τ_{max}
	$\tau_{max} = 1,5 \frac{Q}{A}$
	$\tau_{max} = 1,333 \frac{Q}{A}$
	$\tau_{max} = 2 \frac{Q}{A}$

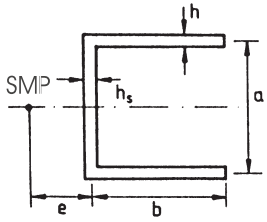
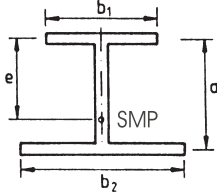
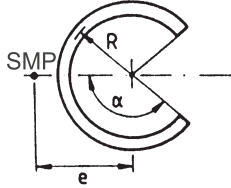
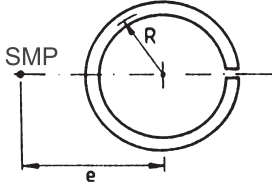
- Schubmittelpunkt:



$$\int_s t(s) \rho(s) ds = Q_z \cdot e_y$$

bzw. $e_y = \frac{1}{I_y} \int_s S_y \rho ds$

– Lage des Schubmittelpunktes:

	$e = \frac{3hb^2}{ah_s + 6bh}$
	$e = \frac{ab_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$
	$e = 2R \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$
	$e = 2R$

6.2 Geschlossene dünnwandige Profile

– Erste Bredt'sche Formel:

$$M_t = 2t_0A$$

- Anmerkung: bei A handelt es sich um die gesamte, vom Profil eingeschlossene Fläche; nicht nur die Profilfläche!
- Vorgehensweise zur Berechnung des Schubflusses bei geschlossenen Profilen (gilt nur, wenn keine Wölbspannungen auftreten, d.h. wenn die Querkraft im Schubmittelpunkt angreift **oder** wenn der Querschnitt ein wölbfreier Querschnitt ist):

(1) Der geschlossene Querschnitt wird an einer beliebigen Stelle aufgeschnitten:

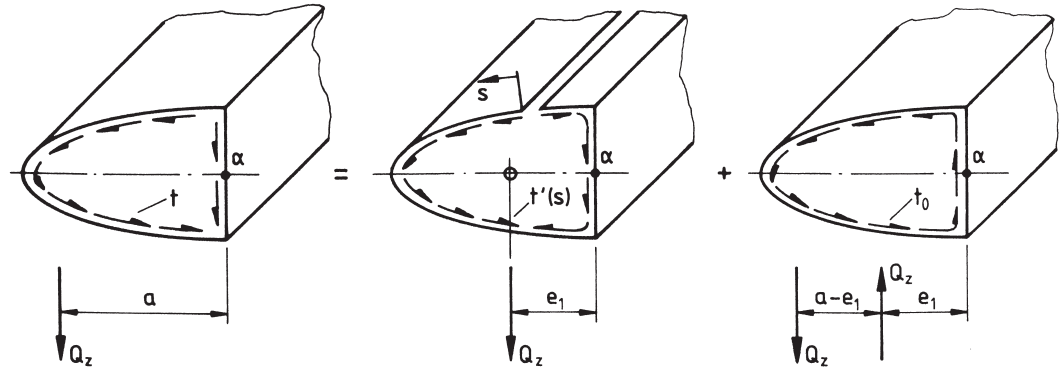
$$\Rightarrow \text{offener Querschnitt: } t' = \frac{Q_z S y}{I_y}$$

(2) Der Schubfluss t_0 wird über die Gleichheit der Torsionsmomente bestimmt:

$$Q_z a = \oint t' p ds + 2At_0 = Q_z e_1 + 2At_0$$

Geschlossene dünnwandige Profile

(3) Die Schubflüsse t' und t_0 werden überlagert:

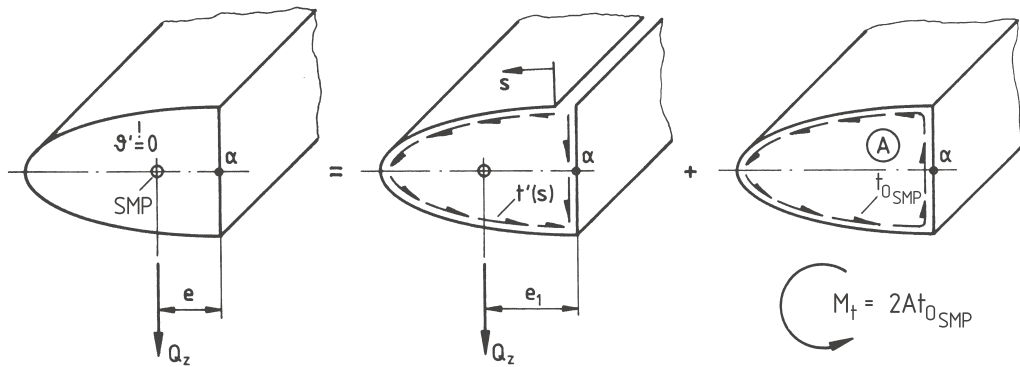


– Bedingung für die Bestimmung des Schubmittelpunktes:

$$\vartheta' = 0 \Rightarrow \oint \frac{t' + t_{0,SMP}}{Gh} ds = 0 \Rightarrow t_{0,SMP} = - \frac{Q_z \oint \frac{S_y}{Gh} ds}{\oint \frac{ds}{Gh}}$$

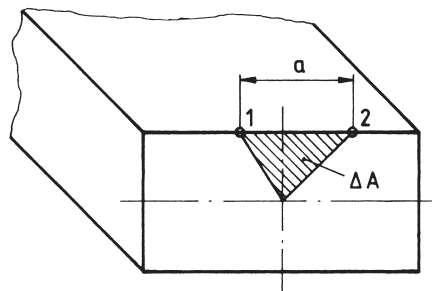
– Unter Anwendung dieser Beziehung kann der Schubmittelpunkt mit der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$Q_z e = \oint t' \rho ds + 2t_{0,SMP} A \Rightarrow e = e_1 - 2 \frac{\frac{A}{I_y} \oint \frac{S_y}{Gh} ds}{\oint \frac{ds}{Gh}}$$



– Bedingung für wölbfreie Querschnitte:

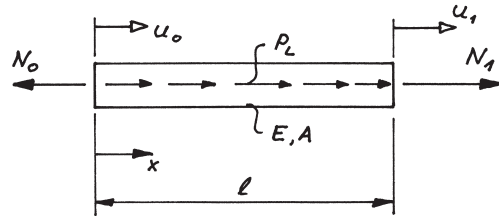
$$\int_1^2 \frac{ds}{Gh} = \frac{\Delta A}{A} \oint \frac{ds}{Gh}$$



7 Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen

7.1 Übertragungsmatrizen $\{W\}$ und Verschiebungsvektoren \vec{u}

– Stab mit einer Streckenlast in Längsrichtung:



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ N \\ 1 \end{bmatrix} \quad \{W\} = \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{l}{AE} & \frac{-p_L l^2}{2AE} \\ 0 & 1 & -p_L l \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

– Schubstarrer Balken:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} w \\ w' \\ M_y \\ \frac{Q_z}{1} \end{bmatrix} \quad w = w_B$$

(a) Übertragungsmatrix für eine konstante Streckenlast in Querrichtung:

$$\{W\} = \left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & l & \frac{-l^2}{2I_y E} & \frac{-l^3}{6I_y E} & \frac{p_0 l^4}{24I_y E} \\ 0 & 1 & \frac{-l}{I_y E} & \frac{-l^2}{2I_y E} & \frac{p_0 l^3}{6I_y E} \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{-p_0 l^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p_0 l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

(b) Punktmatrix $\{P\}$ für die Berücksichtigung angreifender Einzellasten:

$$\{P\} = \left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

– schubweicher Balken:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} w \\ w'_B \\ M_y \\ \frac{Q_z}{1} \end{bmatrix} \quad w = w_B + w_S$$

$$\{W\} = \left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & l & \frac{-l^2}{2I_y E} & \left(\frac{-l^3}{6I_y E} + \frac{l}{A_{Q_z} G} \right) & \frac{p_0}{I_y E} \left(\frac{l^4}{24} - \frac{I_y E l^2}{2A_{Q_z} G} \right) \\ 0 & 1 & \frac{-l}{I_y E} & \frac{-l^2}{2I_y E} & \frac{p_0 l^3}{6I_y E} \\ 0 & 0 & 1 & l & \frac{-p_0 l^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p_0 l \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

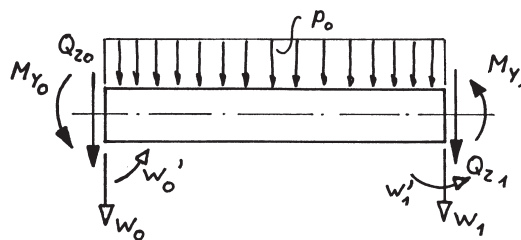
7.2 Steifigkeitsmatrizen

– Maxwellscher Reziprozitätssatz: Die Nachgiebigkeits- und Steifigkeitsmatrix eines konservativen Systems ist symmetrisch.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$k_{ij} = k_{ji}$$

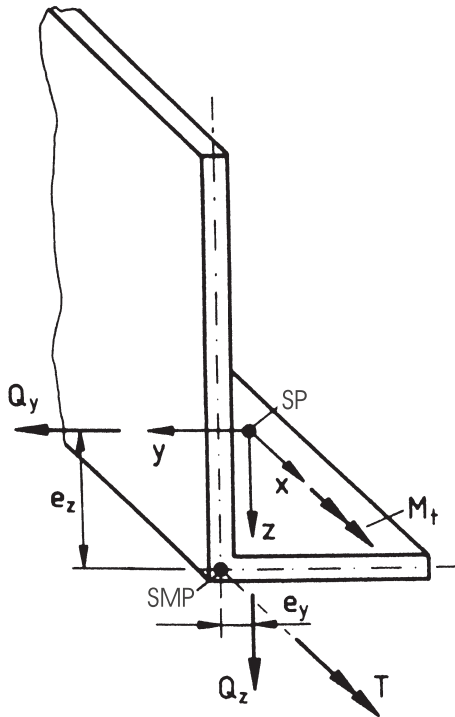
– schubstarrer Balken mit konstanter Streckenlast in Querrichtung:



$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w'_0 \\ w_1 \\ w'_1 \end{bmatrix} + \frac{p_0 l}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{l}{6} \\ -1 \\ -\frac{l}{6} \end{bmatrix}$$

8 Torsion des Balkens

8.1 Torsionsmoment



$$T = M_t + Q_y e_z - Q_z e_y$$

8.2 Torsion nach Saint Venant

– Definitionen:

· Verdrillung:

$$\vartheta' = \frac{T}{GI_T} \quad (I_T \neq I_p)$$

· maximale Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_T}$$

I_T : Torsionsflächenmoment

W_T : Torsionswiderstandsmoment

– Verdrehung des Balkens an einer Stelle \tilde{x} :

$$\vartheta = \int_0^{\tilde{x}} \vartheta' dx$$

– Geschlossene dünnwandige Profile:

· Erste Bredt'sche Formel:

$$M_t = 2t_0 A$$

· Zweite Bredt'sche Formel:

$$GI_T = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{Gh}}$$

· Torsionswiderstandsmoment:

$$W_T = 2Ah_{min}$$

h_{min} : minimale Wanddicke

– Prismatische Stäbe mit Vollquerschnitt:

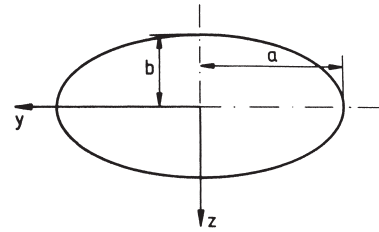
· Kreisförmiger Vollquerschnitt:

$$I_T = \frac{\pi}{2}R^4 \quad W_T = \frac{\pi}{2}R^3$$

· Elliptischer Vollquerschnitt:

$$I_T = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

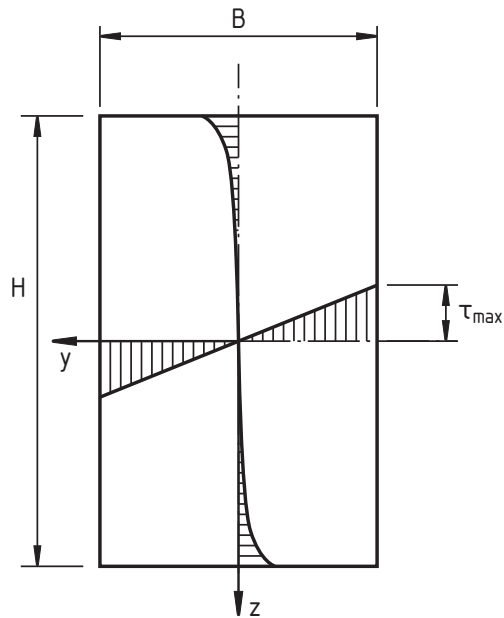
$$W_T = \frac{\pi a b^2}{2}$$



· Rechteckiger Vollquerschnitt:

$$I_T = \eta_1 \frac{B^3 H}{3} \quad W_T = \eta_2 \frac{B^2 H}{3}$$

H/B	η_1	η_2
1	0.4217	0.6245
1.25	0.5152	0.6636
1.5	0.5873	0.6929
2	0.6860	0.7376
3	0.7900	0.8016
4	0.8424	0.8450
5	0.8745	0.8740
6	0.8951	0.8950
8	0.9212	0.9212
10	0.9370	0.9370
20	0.9685	0.9685
50	0.9874	0.9874
∞	1.0000	1.0000

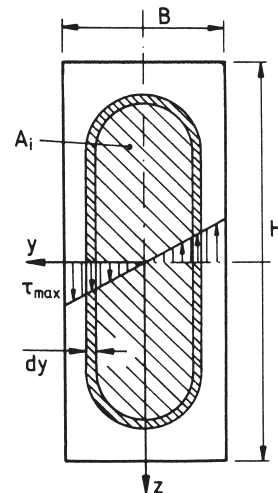


– Näherungslösungen:

· schlanker Rechteckquerschnitt:

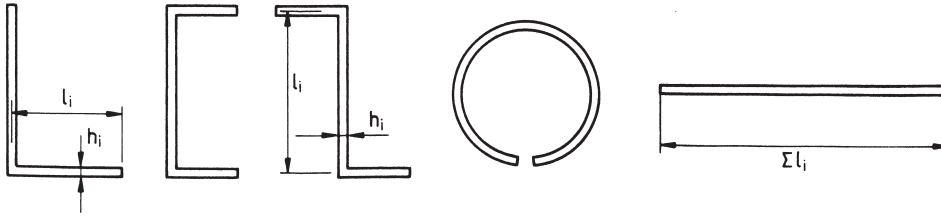
$$I_T = \frac{1}{3}B^3 H$$

$$W_T = \frac{B^2 H}{3}$$



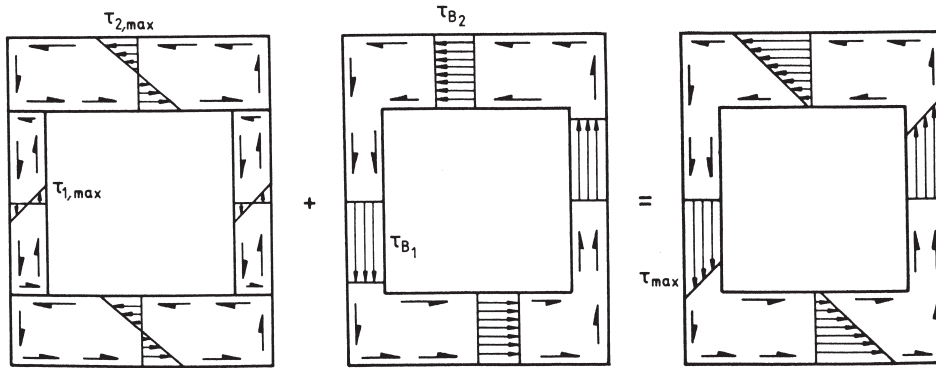
· offene dünnwandige Profile:

$$I_T = \eta_3 \frac{1}{3} \sum_i h_i^3 l_i \quad W_T = \frac{I_t}{h_{max}} = \frac{\eta_3}{3h_{max}} \sum_i h_i^3 l_i$$



Profilform:	L	U	Z	T	⊠	X
η_3	0.99	1.12	1.12	1.12	1.30	1.17

· Dickwandiger Hohlquerschnitt:



$$\left. \begin{aligned} \vartheta' &= \vartheta'_B = \vartheta'_i \\ T &= T_B + \sum_i T_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_T = I_{T_B} + \sum_i I_{T_i}$$

$$\tau_{i,max} = \frac{3T_i}{\eta_{2i} h_i^2 l_i} \quad \tau_{B_i} = \frac{T_B}{2HBh_i}$$

8.3 Wölbkrafttorsion

$$T = M_B + M_{SV}$$

– Torsionsmoment aufgrund Saint Venant'scher Torsion M_{SV} und aufgrund von Biegetorsion M_B :

$$M_{SV} = \vartheta' GI_T \quad M_B = -\vartheta''' C_T E$$

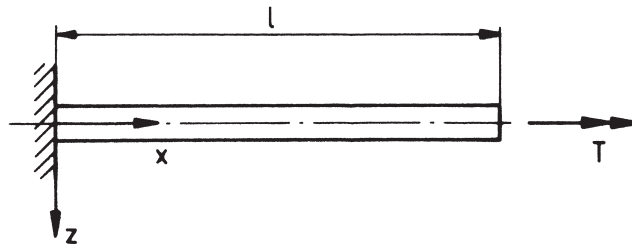
– Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion:

$$\frac{d^3 \vartheta}{d\xi^3} - \alpha^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} = -\mu$$

mit

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \alpha^2 = \frac{GI_T l^2}{EC_T} \quad \mu = \frac{Tl^3}{EC_T}$$

– Lösung für einen Kragbalken unter konstantem Torsionsmoment:



$$\vartheta = A_1 + A_2 \cosh \alpha \xi + A_3 \sinh \alpha \xi + \frac{\mu}{\alpha^2} \xi$$

mit

$$A_1 = -A_2 = -\frac{\mu}{\alpha^3} \tanh \alpha \quad A_3 = -\frac{\mu}{\alpha^3}$$

Wölbwiderstand C_T :

	$C_T = a^2 \frac{I_{F1} I_{F2}}{I_{F1} + I_{F2}} ; \quad I_{Fi} = \frac{t_{Fi} b_{Fi}^3}{12}$
	$C_T = a^2 b^2 A_F \left(\frac{1}{6} - \frac{A_F}{8A_F + 4A_S} \right)$
	$C_T = a^2 b^2 A_F \left(\frac{1}{6} - \frac{A_F}{8A_F + \frac{4}{3}A_S} \right)$

9 Schubfeldträger

9.1 Offene Schubfeldträger

- Schubfluss:

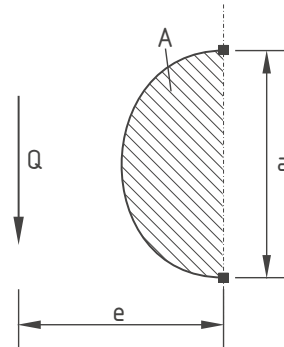
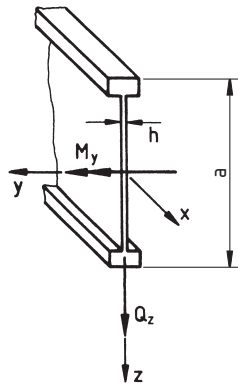
$$t = \frac{Q_z}{a}$$

- Längskräfte in den Gurten:

$$N = \frac{M_y}{a}$$

- Schubmittelpunkt:

$$e = \frac{2A}{a}$$

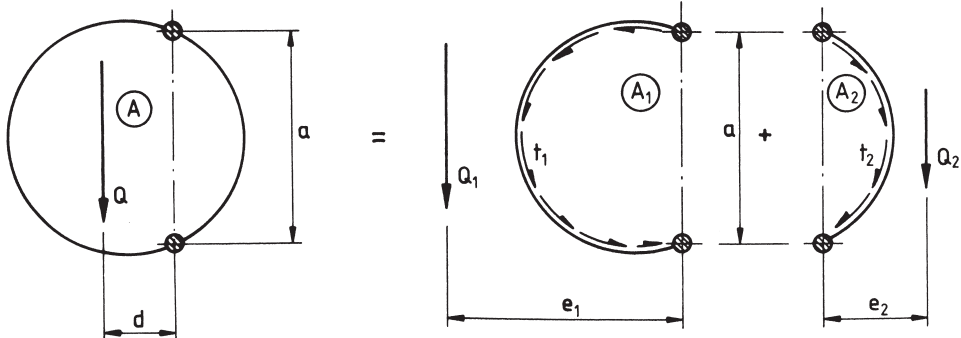


9.2 Geschlossener Schubfeldträger mit zwei Stegen

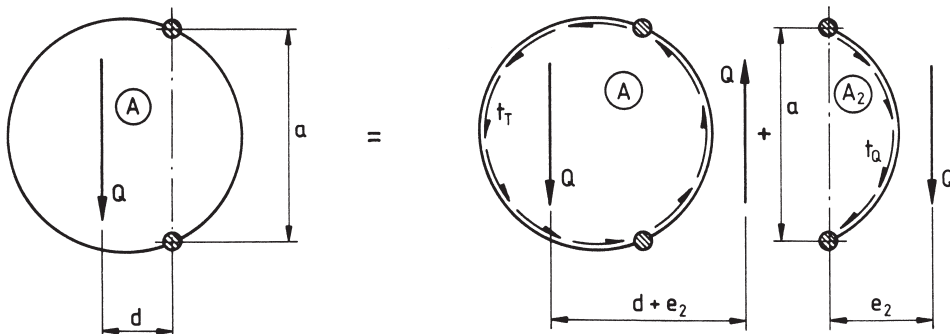
- Bestimmung der Schubflussverteilung:

· Methode 1:

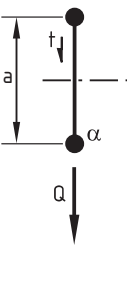
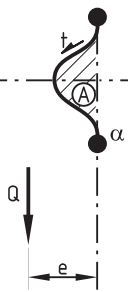
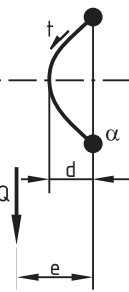

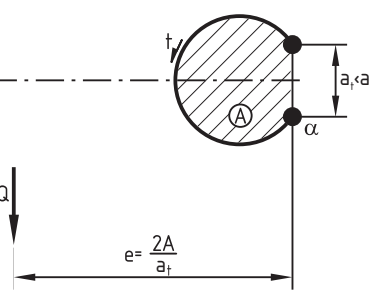
$$Q = Q_1 + Q_2 \quad ; \quad Qd = Q_1e_1 - Q_2e_2$$



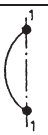







· Methode 2:



Lage des Schubmittelpunktes für einige Schubfeldformen:

gerader Steg	beliebige Form	Parabelform	Halbkreis	großer Bogen
				
$Q = ta$	$Q = ta$	$Q = ta$	$Q = ta$	$Q = ta_t$
$M_{\alpha_t} = 0$	$M_{\alpha_t} = 2At$	$M_{\alpha_t} = \frac{4}{3}adt$	$M_{\alpha_t} = R^2\pi t$	$M_{\alpha_t} = 2At$
$e = 0$	$e = 2\frac{A}{a}$	$e = \frac{4d}{3}$	$e = \frac{\pi}{2}R$	$e = \frac{2A}{a_t}$

Belastbarkeit der Schubfeldträger:

									
Längskraft im Flächenschwerpunkt von den Gurten		X	X	X	X	X	X	X	X
Querkraft im Schubmittelpunkt	parallel zu 1-1	X					X		X
	beliebige Richtung		X	X	X			X	
punkt Biegemoment	senkrecht auf 1-1	X					X		X
	beliebige Richtung		X	X	X			X	
Torsionsmoment				X		X	X	X	X

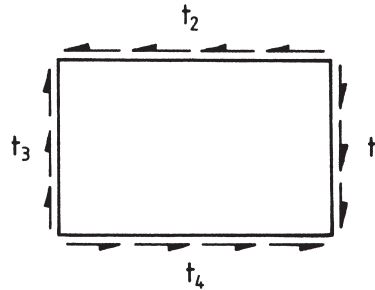
9.3 Ebene Schubfeldträger

- Bestimmung der Längskräfte in den Stäben:

$$N(x) = \int_0^x t dx + N_0$$

- Rechteckige Schubfelder:

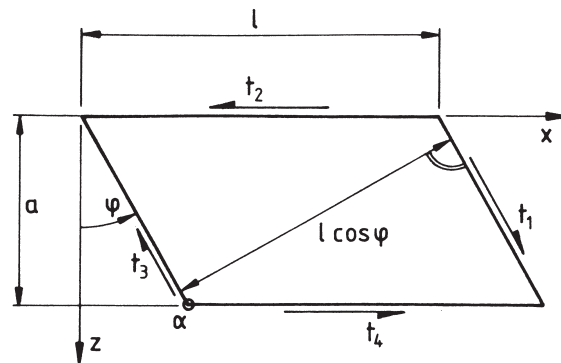
$$t = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \text{const.}$$



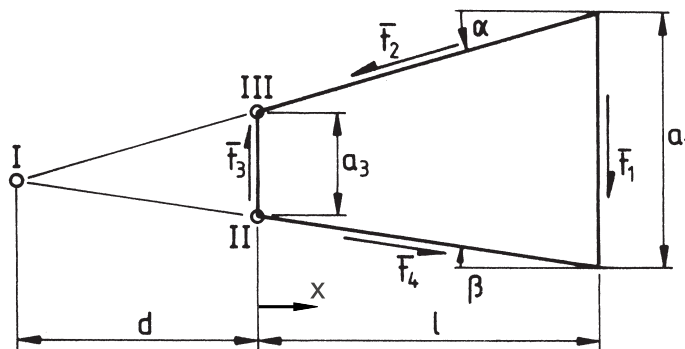
- Parallelogrammförmige Felder:

$$t = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \text{const.}$$

$$n_x = 2t \tan \varphi$$



- Trapezförmige Felder:



- Definition des mittleren Schubflusses:

$$\bar{t} = \frac{\int_0^l t(x) dx}{l}$$

- Bestimmung der mittleren Schubflüsse:

$$\frac{\bar{t}_3}{\bar{t}_1} = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2 \qquad \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_2} = \frac{\bar{t}_4}{\bar{t}_3} = \frac{a_3}{a_1} \qquad \bar{t}_2 = \bar{t}_4$$

- Die Schubflüsse entlang der Kanten 1 und 3 sind konstant:

$$\bar{t}_1 = t_1 = \text{const.} \quad \bar{t}_3 = t_3 = \text{const.}$$

- Schubflussverteilung entlang der Kanten 2 und 4:

$$t(x) = t_3 \left(\frac{a_3}{a(x)} \right)^2 = t_3 \left(\frac{d}{d+x} \right)^2$$

$$t(x) = t_m \frac{a_1 a_3}{a(x)^2} \quad t_m = \sqrt{\bar{t}_2 \bar{t}_4} = \sqrt{t_1 t_3}$$

- Längskraft in den Stäben 2 und 4:

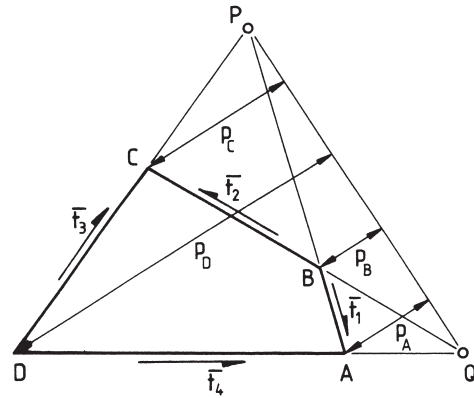
$$N_2(x) = N_{20} + \frac{t_3}{\cos \alpha} \frac{x}{1 + \frac{x}{l} \left(\frac{a_1}{a_3} - 1 \right)}$$

$$N_4(x) = N_{40} - \frac{t_3}{\cos \beta} \frac{x}{1 + \frac{x}{l} \left(\frac{a_1}{a_3} - 1 \right)}$$

- Allgemeine viereckige Felder:

$$A = \bar{t}_1 p_A p_B = \bar{t}_2 p_B p_C = \bar{t}_3 p_C p_D = \bar{t}_4 p_D p_A$$

$$t_m = \sqrt{\bar{t}_2 \bar{t}_4} = \sqrt{\bar{t}_1 \bar{t}_3}$$



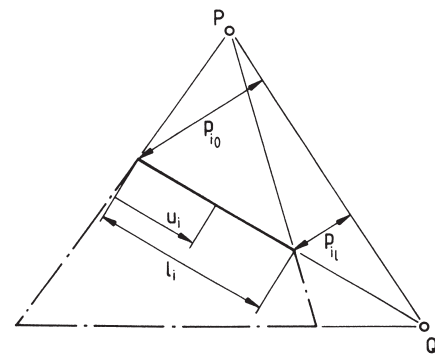
- Schubfluss entlang der Kante i:

$$t_i(u_i) = \frac{t_{i0}}{\left[1 + \left(\frac{p_{il}}{p_{i0}} - 1 \right) \frac{u_i}{l_i} \right]^2}$$

$$t_{i0} = \frac{A}{p_{i0}^2}$$

- Längskraft im Stab i:

$$N_i(u_i) = N_{i0} + \frac{t_{i0} u_i}{1 + \left(\frac{p_{il}}{p_{i0}} - 1 \right) \frac{u_i}{l_i}}$$



10 Anhang

– Integrale:

$$\int \frac{1}{X^3} dx = -\frac{1}{2a} X^{-2} + c \quad X = ax + b$$

$$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} + c$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax) + c$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax) + c$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + c$$

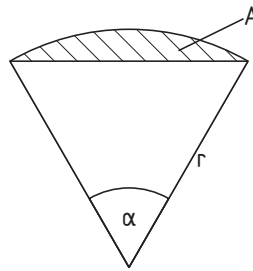
– Quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

– Querschnittsfläche eines Kreissegments:

$$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180^\circ} - \sin \alpha \right)$$

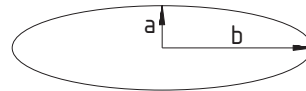


– Ellipsenfläche:

$$A = \pi ab$$

– Ellipsenumfang:

$$U = \pi (1,5 \cdot (a + b) - \sqrt{ab})$$



– Hyperbelfunktionen:

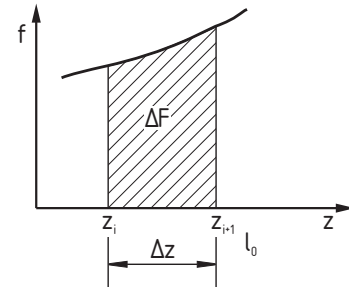
$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

– Additionstheorem:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

– Numerische Integration mit der Sehnen-Trapez-Regel

$$F_{i+1} = F_i + \underbrace{\frac{1}{2}(f(z)_i + f(z)_{i+1})}_{\Delta F} \cdot \Delta z$$



– Integration von einfachen Funktionen:

	$\int_0^l f(x) dx$
	al
	$\frac{1}{2}al$
	$\frac{1}{2}al$
	$\frac{2}{3}al$
	$\frac{1}{2}(a+b)l$